

BEITRÄGE ZUR WEISSKOPF-WIGNER-THEORIE BEWEGTER ATOME

Jan Mühlstein

1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555625_0078

BEITRÄGE ZUR WEISSKOPF-WIGNER-THEORIE BEWEGTER ATOME

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

des Fachbereichs Physik

der Ludwig-Maximilians-Universität

München



vorgelegt von

Jan Mühlstein

München

1977

1. Berichterstatter: Priv.Doiz.Dr. V. Ernst

2. Berichterstatter: Prof.Dr. H. Walther

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Juli 1977



Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht innerhalb einer Weisskopf-Wigner-Theorie den Einfluß der nichtrelativistischen Bewegung der Atome auf die absorbierten und emittierten Photonen. Dabei haben wir zwei Ziele im Auge:

1. Wir testen, ob die Weisskopf-Wigner-Theorie mit der Erfahrung übereinstimmt;
2. Wir wollen Voraussetzungen schaffen, die es später ermöglichen sollen, die Temperatur des "Lasergases" über die Bewegung der Atome einzuführen. Die Temperatur geht als ein wichtiger Parameter in die Schwellenbedingung der Strahlbildung ein.

Dazu behandeln wir zwei einfache Systeme in niedrigster Weisskopf-Wigner-Näherung:

- a) Viele bewegte, sich nichtüberlappende Zwei-Niveau-Dirac-Atome in Wechselwirkung mit einem Photon;
- b) Zwei bewegte, sich nichtüberlappende anfangs angeregte Zwei-Niveau-Dirac-Atome.

Die Ergebnisse, die voll mit der physikalischen Beobachtung im Einklang stehen, können wir zusammenfassen:

- (i) Die Bewegung der Atome führt zu "richtigen" Doppler-Verschiebungen der Emissions- und Absorptionsfrequenzen, der spontane Zerfall der angeregten Atomzustände bleibt unverändert;
- (ii) Die Atome verhalten sich wie Photonen-zähler: Ein angeregtes Atom (besetzter Zähler) kann kein weiteres Photon absorbieren (zählen);
- (iii) Die Lösungsamplituden werden aus den Anfangsamplituden durch zwei Grundprozesse - die spontane Emission und die Resonanzfluoreszenz - den Gesetzen der Kombinatorik entsprechend und somit kausal aufgebaut. Alle durch den Photonenaustausch zwischen den Atomen bedingten Laufzeiteffekte werden richtig wiedergegeben.

Inhaltsverzeichnis

§1. Einleitung und Diskussion der Ergebnisse	1
§2. Weisskopf-Wigner-Theorie bewegter Atome	6
2.1 Allgemeine physikalische Prinzipien	6
2.2 Postulate zum Existenzsatz der Weisskopf-Wigner-Theorie	7
2.3 Die Weisskopf-Wigner-Näherung	10
§3. Eine Weisskopf-Wigner-Theorie J bewegter Atome und eines Photons	13
3.1 Bewegungsgleichungen	13
3.2 Spontane Amplitude des Atoms A_j ; Exponentialnäherung	17
3.3 Ein bewegtes Atom, ein Photon	20
3.4 Zwei bewegte Atome, ein Photon	23
3.5 J bewegte Atome, ein Photon	27
§4. Eine Weisskopf-Wigner-Theorie von zwei angeregten bewegten Atomen	31
4.1 Bewegungsgleichungen	31
4.2 Lösung der Bewegungsgleichungen	35
4.3 Vernachlässigung der Integralterme	37
4.4 Ein-Photon-Amplituden	40
4.5 Die Null-Photonen-Amplitude	43
4.6 Zwei-Photonen-Amplituden	43
4.7 Interpretation der Lösung	44
4.7 a) Die Null-Photonen-Amplitude	44
4.7 b) Die Ein-Photon-Amplituden	45
4.7 c) Die Zwei-Photonen-Amplitude	48

Anhang A : Der Verschiebeoperator $\mathcal{P}(x)$	51
--	----

Anhang B : Invertieren der Matrix $\mathcal{N}_{JJ}(s)$	52
---	----

Literaturverzeichnis	63
----------------------------	----

§1. Einleitung und Diskussion der Ergebnisse

Es ist gezeigt worden [1], daß die Feynman-Dyson Entwicklung der Quantenelektrodynamik für Anwendungen auf die wirklich interessanten Probleme der Quantenoptik praktisch nicht geeignet ist. Wohl aber läßt sich eine Verallgemeinerung der alten Weisskopf-Wigner'schen Theorie [2] der natürlichen Linienbreite finden, die auch auf die "kohärente" Emission von vielen Photonen durch viele Atome angewendet werden kann. Die Idee dieser Näherung von Dirac [3], Weisskopf und Wigner [2] wurde von Ernst und Stehle [4] auf Prozesse vieler angeregten Atome erweitert und von Grimm und Ernst [5] und Stelzer, Mühlstein und Ernst [1] zu einem systematischen mathematisch abgeschlossenen Näherungsverfahren für Probleme der Emission und Absorption von Photonen durch Atome entwickelt. Die Ordnungshierarchie dieser Weisskopf-Wigner-Theorie ist dem physikalischen Charakter der Atom-Photon-Wechselwirkungsprozesse angepasst. Sie wird nicht durch Potenzen der Kopplungskonstante, sondern durch physikalische "Wichtigkeit" der Zustände im Hilbertraum des gekoppelten Systems von Atomen und Photonen festgelegt.

Die Weisskopf-Wigner-Theorie hat sich als leistungsfähig erwiesen. Es gelang nicht nur innerhalb der Theorie eindeutige Existenzaussagen zu machen [1,5], die Probleme der gebundenen Photone und des Lambshifts zu diskutieren [6,7], die Erhaltung der Kausalität - zumindest für bestimmte Systeme - zu beweisen [8], sondern auch konkrete Probleme zu lösen [4,9,10]. In keiner dieser Untersuchungen hat die Weisskopf-Wigner-Theorie zum Widerspruch mit der physikalischen Erfahrung geführt. Die Hoffnung, mit Hilfe dieser Methode die Strahlbildung bei einem Laser realistisch und gleichzeitig mit den Prinzipien der Quantenmechanik vereinbar zu beschreiben, scheint deshalb nicht unbegründet zu sein.

Die vorliegende Arbeit versucht, die Übereinstimmung der Weisskopf-Wigner-Theorie mit der Beobachtung in einem weiteren Bereich zu testen. Wir be-

trachten die Auswirkungen einer nichtrelativistischen Bewegung der Atome auf die abgestrahlten oder absorbierten Photonen. Der erste Versuch in dieser Richtung [11], die Behandlung eines bzw. zweier Atome und eines Photons in der niedrigsten Weisskopf-Wigner-Näherung hat bereits die "richtige" Doppler-Verschiebung der Übergangsfrequenzen ergeben. In dieser Arbeit untersuchen wir zwei Systeme:

- 1) Viele bewegte, sich nichtüberlappende Zwei-Niveau-Dirac-Atome in Wechselwirkung mit einem Photon;
- 2) Zwei bewegte, sich nichtüberlappende anfangs angeregte Zwei-Niveau-Dirac-Atome.

In beiden Fällen beschränken wir uns auf die niedrigste Weisskopf-Wigner-Näherung. Die physikalisch "wichtigen" Zustände suchen wir mit Hilfe der Bohr'schen Übergangsregel: Wir fordern, daß ein Atom nur dann vom unteren (oberen) Niveau in das obere (untere) Niveau übergeht, wenn gleichzeitig genau ein Photon absorbiert (emittiert) wird.

Aber nicht nur der Test der Theorie ist das Ziel unserer Untersuchung. Die Bewegung der Atome soll es in der Zukunft ermöglichen, den Einfluß der Temperatur des "Lasergases" auf die Strahlbildung zu untersuchen. Die - durch die Atombewegung bedingte - Temperatur des Gases geht als wichtiger Parameter in die Schwellenbedingung ein.

Die Ergebnisse der Arbeit können wir in drei Punkte zusammenfassen:

- (i) Die Bewegung der Atome führt zu "richtigen" Doppler-Verschiebungen der Emissions- und Absorptionsfrequenzen. Die von den Atomen abgestrahlte Lorentz-Linien sind Doppler-verschoben und-verbreitert.¹⁾
Der spontane Zerfall der angeregten Zustände der Atome wird bei einer nichtrelativistischen Bewegung der Atome nicht verändert.
- (ii) Wie bei ruhenden Atomen zeigt es sich, daß die Atome sich wie Photonen-zähler verhalten: Ein angeregtes Atom (besetzter Zähler) kann kein weiteres Photon absorbieren (zählen).

- (iii) Die Lösungsamplituden werden aus den Anfangsamplituden durch zwei Grundprozesse - die spontane Emission und die Resonanzfluoreszenz - den Gesetzen der Kombinatorik entsprechend aufgebaut. Dies stimmt mit den Ergebnissen der Arbeiten über ruhende Atome [8,10] überein und ist eine Konsequenz der Bosestatistik der Photonen. Dieser kombinatorische Aufbau der Amplituden sorgt auch für die Erhaltung der Kausalität [8].

Die Arbeit hat folgenden Aufbau:

Im §2 entwickeln wir, gestützt auf [1], die Weisskopf-Wigner-Theorie bewegter Atome aus drei physikalischen Grundprinzipien. Wir stellen neun Postulate auf, deren Erfüllung die Existenz einer endlichen Lösung sichert. In dem durch die Postulate definierten Hilbertraum des wechselwirkenden Systems bewegter Atome und des Strahlungsfeldes führen wir das Weisskopf-Wigner-Näherungsverfahren ein: nach physikalischen Gesichtspunkten suchen wir "wichtige" Zustände aus; die übrigen Zustände des Systems betrachten wir als nichtexistent.

§3 behandelt eine Weisskopf-Wigner-Theorie J bewegter Atome und eines Photons in der niedrigsten Näherung. Als "wichtige" Zustände wählen wir: "Ein Atom angeregt, übrige Atome im Grundzustand, kein Photon vorhanden" und "Alle Atome im Grundzustand, ein Photon vorhanden". Die Schrödinger-Bewegungsgleichung des Systems können wir explizite lösen (das dabei aufgetauchte Problem der Inversion einer $J \times J$ Operatorenmatrix wird im Anhang B behandelt). Die Lösungen enthalten u.a. die Amplituden des spontanen Zerfalls. Für nichtrelativistische Atombewegungen ist dieser spontane Zerfall mit dem der ruhenden Atome identisch. Deshalb wenden wir auf diese Amplituden eine bewährte Sekundärnäherung - die Exponentialnäherung - an. In dieser Näherung diskutieren wir die Lösungen schrittweise. Zuerst, im

Fall $J=1$, erhalten wir einen spontanen Zerfall des angeregten Zustandes, der mit dem Zerfall bei einem ruhenden Atom identisch ist. In der Exponentialnäherung ist dies ein exponentieller Zerfall. Die Resonanzfluoreszenz mit dem inzidenten Wellenpaket, die am aktuellen Ort des Atoms $\underline{x}(t) = \underline{x}^0 + \underline{v}t$ erfolgt, zeigt die richtige Doppler-Verschiebung der Resonanzfrequenz. Die von dem bewegten Atom abgestrahlte Lorentzlinie ist ebenfalls Dopplerverschoben und -verbreitert. Die Lösungen des Falles $J=2$ setzen sich aus den Dopplerverschobenen Prozessen der spontanen Emission und der Resonanzfluoreszenz zusammen. Explizite diskutieren wir die Laufzeiteffekte des Photons zwischen den beiden Atomen. Sie setzen sich, den Gesetzen der Kombinatorik und der Kausalität folgend, aus den bereits erwähnten zwei Grundprozessen zusammen. Die gleichen Eigenschaften weist auch die Lösung für ein beliebiges J auf: kombinatorischer, kausal richtiger Aufbau aus den beiden Grundprozessen, richtige Dopplerverschiebungen der Übergangsfrequenzen, Dopplerverschobene und -verbreiterte Lorentzlinie, Photonenlaufzeiteffekte.

Im §4 betrachten wir die niedrigste Weisskopf-Wigner-Näherung des Systems von zwei bewegten, anfangs angeregten Atomen. Die "wichtigen" Zustände sind: "Beide Atome angeregt, kein Photon vorhanden", "Eines der Atome angeregt, das andere Atom im Grundzustand, ein Photon vorhanden" und "Beide Atome im Grundzustand, zwei Photonen vorhanden". Zur Lösung der Schrödinger-Bewegungsgleichung machen wir einen Ansatz, mit dem die Polarisationsvariablen und ein Teil der Winkelabhängigkeiten im Impulsraum absepariert werden. Übrig bleibt die von der Bewegung der Atome herrührende "dynamische" Winkelabhängigkeit der Amplituden. Die in den Bewegungsgleichungen auftretenden Integralterme verschwinden, wenn wir bestimmte Annahmen über die Eigenschaften der Lösungen machen und die Exponentialnäherung ausdehnen. Die Selbstkonsistenz dieser Annahmen wird später geprüft. Nach der Vernachlässigung der

Integralterme kann die Bewegungsgleichung explizite gelöst werden. Es zeigt sich, daß in der Exponentialnäherung die Null-Photonen-Amplitude mit der der ruhenden Atome übereinstimmt: Die Wahrscheinlichkeit, beide Atome noch im angeregten Zustand vorzufinden, ist dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten, das einzelne Atom noch angeregt vorzufinden, gleich. Die Ein-Photon-Amplituden und die Zwei-Photonen-Amplitude zeigen den bereits im §3 beobachteten kombinatorischen und kausal richtigen Aufbau aus den Doppler-verschobenen Grundprozessen der spontanen Emission und der Resonanzfluoreszenz. Auch die bewegten Atome zeigen die Eigenschaften eines Photonen-zählers: Ein angeregtes Atom kann, entsprechend einem besetzten Zähler, kein weiteres Photon "zählen", d.h. absorbieren. Die Resonanzfluoreszenz mit diesem Photon kann erst dann einsetzen, wenn der angeregte Zustand des Atoms zumindestens angefangen hat zu zerfallen.

Der Anhang A behandelt den in den Gleichungen auftretenden Verschiebeoperator $\mathcal{H}(\alpha)$, der durch die Bewegung der Atome bedingt ist. Wir definieren, auf welchem Raum dieser Operator wirkt und zeigen, daß seine Norm gleich Eins ist.

Im Anhang B führen wir den mathematischen Beweis für die Inversion der Operatorenmatrix aus dem §3 (die auch im §4 gebraucht wird). Gleichzeitig beweisen wir die Konvergenz der in diesen Ausdrücken auftretenden Reihen.

Fußnote 1):

Diese Doppler-Verbreiterung bezieht sich nur auf die einzelne emittierte Linie. Die beobachtete Linie aber ist eine Überlagerung der von einzelnen Atomen abgestrahlten Doppler-verschobenen Linien. Da ein Teil der strahlenden Atome sich auf den Beobachter und ein Teil von ihm bewegt, führen die Verschiebungen der Linienmaxima zu einer weiteren Linienverbreiterung. Wegen der kleinen Zahl der zugelassenen Photonen spielen solche Verbreiterungen der Linie in unseren Untersuchungen keine wesentliche Rolle.

§2. Weisskopf-Wigner Theorie bewegter Atome

Die Weisskopf-Wigner-Theorie der bewegten Atome ist in [1] entwickelt worden. Hier sind auch hinreichende Bedingungen angegeben worden, die in jedem endlichen Näherungsschritt die Existenz einer eindeutigen endlichen Lösung garantieren. Wir folgen dieser Arbeit und fassen an dieser Stelle die Postulate und den Aufbau der Theorie zusammen; dabei führen wir auch die notwendigen Bezeichnungen ein.

2.1 Allgemeine physikalische Prinzipien

Wir wollen drei physikalische Grundprinzipien herausstellen, deren Erfüllung für den Aufbau einer quantenoptischen Theorie notwendig erscheint:

- (i) Der Dualismus des Lichtes [12] verlangt eine Quantisierung des Strahlungsfeldes R .
- (ii) Als direkte Folge der Bosestatistik, der die Photonen unterworfen sind, verlangt das Dicke-Prinzip [13], daß die Absorption und Emission von Photonen im gleichen Raumgebiet nicht statistisch unabhängig erfolgen kann. Daher müssen alle Atome an das elektromagnetische Feld R gekoppelt sein. Die Kopplung der Atome an das Strahlungsfeld R der transversalen Photone beschreibt die Heisenberggleichung

$$i \frac{d}{dt} \psi_j(x,t) = (-i\alpha \nabla + \beta m_j^0 + V_j(x - x_j(t)) + e\alpha A(x,t)) \psi_j(x,t), \quad j=1, \dots, J \quad (2.1a)$$

und

$$(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}) A(x,t) = e \sum_{j=1}^J (\psi_j^\dagger(x,t) \alpha \psi_j(x,t))_{tr}. \quad (2.1b)$$

Hier ist $A(x,t)$ der Heisenbergoperator der Observablen "transversaler

Anteil des Vektorpotentials" des Strahlungsfeldes A und $\psi_j(\underline{x}, t)$ ist der Heisenbergoperator einer Amplitude des Fermionfeldes, welches mit dem aktiven Atom A_j , $j=1, \dots, J$ verknüpft ist. $\underline{X}_j(t)$ ist der Ort von A_j zur Zeit t und $V_j(\underline{x} - \underline{X}_j(t))$, eine um $\underline{X}_j(t)$ konzentrierte c-Zahlfunktion, das Potential des Atoms A_j ist. Weiter ist m_j^0 die effektive Masse der Elektronen von A_j , e die Kopplungskonstante und α, β die üblichen Diracmatritzen. Die Observable $\underline{A}(\underline{x}, t)$ des Strahlungsfeldes A wirkt in (2.1a) links als ein zusätzliches "Potential", andererseits sind in (2.1b) alle Atome $A_1, \dots, A_J$ "Quelle" des elektromagnetischen Feldes. Diese Kopplung, in der die Atome nur als Kollektiv erscheinen, führt zu Viel-Photonen-Kollektiv-Phänomenen, die mit Laser- und Superstrahlung identifiziert werden müssen [4, 13 - 18].

- (iii) Die Kausalität fordert, daß sich die Photonen als Träger von Signalen in allen Richtungen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Dies ist nur mit einem vollständigen Modensatz des Strahlungsfeldes A möglich und hat zur Folge, daß die Gleichung (2.1) sowohl einen gerichteten Strahl wie auch die schwarze Strahlung zuläßt.

2.2 Postulate zum Existenzsatz der Weisskopf-Wigner-Theorie

Wir wollen neun Postulate aufstellen, die uns die Existenz einer eindeutigen **endlichen** Lösung in jedem endlichen Näherungsschritt der Weisskopf-Wigner-Theorie sichern. Diese Postulate sind mit den Erfahrungen der Quantenoptik verträglich.

P1: Elektronen, die zu verschiedenen sich räumlich nichtüberlappenden Atomen gehören, werden als Quanten von verschiedenen Fermionfeldern angesehen. Unsere Untersuchungen schränken wir auf solche nicht-überlappende Atome ein.

P2: Betrachtet werden Ein-Elektron-(Dirac)-Atome, die eine vorgegebene

nichtrelativistische Bewegung vollziehen. Der Ort des Atoms A_j , $j=1, \dots, J$, wird im Laborsystem mit

$$\underline{X}_j(t) = \underline{X}_j^0 + \underline{v}_j t \quad (2.2)$$

beschrieben, wobei $\underline{X}_j^0$ den Ort des Atoms A_j zur Zeit $t=0$ beschreibt und $\underline{v}_j$ seine, gegenüber der Lichtgeschwindigkeit kleine, Geschwindigkeit ist. Die Bewegung der Atome soll so verlaufen, daß die Nichtüberlappung der Atome für jede Zeit t gewährt wird.

P3: Die Dirac-Atome A_j , $j=1, \dots, J$, werden durch eine Diracgleichung in einem festen Potential $V_j(\underline{x} - \underline{X}_j(t))$ um den Ort $\underline{X}_j(t)$ gegeben. $\mu_{a_j}^j(\underline{x} - \underline{X}_j(t))$ seien die orthonormalen und vollständigen Elektroneneigenlösungen zu der diskreten Energie $E_{a_j}^j > 0$, wobei der Index a_j ein Satz von Quantenzahlen für das Atom A_j ist. Wenn $\dot{\underline{X}}_j(t)$ gegen 1 vernachlässigt wird, was bei nichtrelativistischen Geschwindigkeiten zulässig ist, stimmen die Eigenenergien und die Eigenlösungen in den Relativkoordinaten mit denen der ruhenden Dirac-Atome überein.

P4: Die Erzeugung und Vernichtung von Elektron-Positron Paaren spielt in der Quantenoptik keine Rolle. So kann man den für das Atom A_j gegebenen Schrödingeroperator $\psi_j^t(\underline{x})$ schreiben als:

$$\psi_j^t(\underline{x}) = \sum_{a_j} \mu_{a_j}^j(\underline{x} - \underline{X}_j(t)) b_{a_j}^j, \quad (2.3)$$

wobei die Summe über alle Eielektroneneigenzustände im Potential vom Atom A_j geht und $b_{a_j}^j$ einen Elektron im Zustand $\mu_{a_j}^j(\underline{x} - \underline{X}_j(t))$ vernichtet. Mit dem entsprechenden Erzeugungsoperator $b_{a_j}^{+j}$ erfüllen sie die üblichen Antivertauschungsrelationen. Die Zeitabhängigkeit der Schrödingeroperatoren ist durch die vorgegebene Atomenbewegung bestimmt. Für die Schrödingeroperatoren gelten aber die zeitunabhängigen Antivertauschungsrelationen

$$[\psi_j^{t'}(\underline{x}), \psi_j^t(\underline{x}')]_{\pm} = \delta(\underline{x} - \underline{x}') \quad , \text{ etc.} \quad (2.4)$$

P5: Der Zustandsraum jedes der betrachteten Fermionfelder ist ein Fockraum $\mathcal{F}_e^j$. Der in P4 definierte Operator $\psi_j^t(\underline{x})$ wirkt auf diesen Fockraum $\mathcal{F}_e^j$, dessen Element $|f_e^j\rangle$ in der Form

$$|f_e^j\rangle = f_0^j |\nu_e^j\rangle + \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{a_{j_1}^1} \dots \sum_{a_{j_j}^j} f_{j_1 \dots j_j}^j(a_{j_1}^1, \dots, a_{j_j}^j) b_{a_{j_1}^1}^{+j} \dots b_{a_{j_j}^j}^{+j} |\nu_e^j\rangle \quad (2.5)$$

geschrieben wird. Hierbei ist $|\nu_e^j\rangle$ das Vakuum in $\mathcal{F}_e^j$, welches für jedes a_j $b_{a_j}^j |\nu_e^j\rangle = 0$ erfüllt. f_0^j ist eine komplexe Zahl und $f_{j_1 \dots j_j}^j(a_{j_1}^1, \dots, a_{j_j}^j)$ sind antisymmetrische c-Zahlfunktionen der diskreten Variablen $a_{j_1}^1, \dots, a_{j_j}^j$.

P6: Der Zustandsraum der transversalen Photonen ist ein Bose-Fockraum $\mathcal{F}_p$.

Ein Element $|f^p\rangle$ von $\mathcal{F}_p$ wird geschrieben [19] als

$$|f^p\rangle = f_0^p |\nu_p\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{1/2}} \int d^3k_1 \dots \int d^3k_n \sum_{a_{k_1}=1}^2 \dots \sum_{a_{k_n}=1}^2 \xi(k_1, a_1) \otimes \dots \otimes \xi(k_n, a_n) f_n^p(k_1, \dots, k_n) a_{k_1, a_1}^+ \dots a_{k_n, a_n}^+ |\nu_p\rangle \quad (2.6)$$

Hier sind $|\nu_p\rangle$ der normierte Photonen-Vakuumszustand, definiert durch $a_{k, a} |\nu_p\rangle = 0$ für jedes $k \in \mathbb{R}^3$ und $a \in \{1, 2\}$, und $a_{k, a}$, $a_{k, a}^+$ die üblichen Bose-Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren mit

$$[a_{k, a}, a_{k', a'}^+] = \delta(k - k') \delta_{a, a'} \quad \xi(k, a) \text{ sind die Einheitspolarisationsvektoren}$$

in $\mathbb{R}^3$, die aber nur zwei Freiheitsgrade besitzen und für die gilt

$$k \cdot \xi(k, a) = 0 \quad \text{und} \quad \xi(k_1, a_1) \otimes \dots \otimes \xi(k_n, a_n) = \delta_{a_1, a_2} \dots \delta_{a_{n-1}, a_n} \in \mathbb{R}^{3n}$$

ist das n-fache Tensorprodukt. $f_0^p \in \mathbb{C}$, $f_n^p, n \geq 1$ ist ein Tensor n-ter Stufe

definiert durch

$$f_n^p(k_1, \dots, k_n) := \sum_{a_1, \dots, a_n=1}^2 \xi(k_1, a_1) \otimes \dots \otimes \xi(k_n, a_n) f_n^p(k_1, a_1; \dots; k_n, a_n), \quad (2.7)$$

wobei $f_n^p(k_1, a_1; \dots; k_n, a_n)$ eine Lebesgue-quadratisch integrable, sym-

metrische orthogonale c-Zahlfunktion der n Argumente $(k_1, a_1), \dots,$

(k_n, a_n) ist. Man kann sich leicht überzeugen, daß

$$\xi(k_1, a_1) \otimes \dots \otimes \xi(k_n, a_n) f_n^p(k_1, \dots, k_n) = f_n^p(k_1, a_1; \dots; k_n, a_n) \quad (2.8)$$

ist.

Der Schrödinger-Operator der Observablen $A(x)$ des Strahlungsfeldes R

ist gegeben durch

$$A(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{a=1}^2 \int d^3k \frac{\xi(k, a)}{(2k)^{1/2}} (e^{ikx} a_{k, a} + e^{-ikx} a_{k, a}^+) \quad (2.9)$$

in $\mathcal{F}_p$.

P7: Der Zustandsraum des wechselwirkenden Systems $R + A_1 + \dots + A_J$ ist

der Hilbertraum

$$\mathcal{H} := \mathcal{F}_p \otimes \mathcal{F}_e^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_e^J, \quad (2.10)$$

wobei $\otimes$ das übliche Tensorprodukt bezeichnet.

Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems ist auf $\mathcal{H}$ definiert als:

$$H_{\mathcal{H}} := \sum_{k=1}^3 \int d^3x \, a_{k,\alpha}^\dagger a_{k,\alpha} + \sum_{j=1}^J \left[\int d^3x \, \psi_j^{\dagger\dagger}(x) \left\{ \alpha \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) + m_j \beta + V_j(x - x_j(t)) - i \frac{d}{dt} \right\} \psi_j^{\dagger}(x) \right] + \\ + e \int d^3x \, A(x) (\psi_j^{\dagger\dagger}(x) \otimes \psi_j^{\dagger}(x))_{tr} \quad . \quad (2.11)$$

P8: Nur eine endliche Anzahl der Eigenzustände $\mu_{a_j}^j(x)$ jedes Atoms A_j ist für die Wechselwirkung von Bedeutung, alle anderen Eigenzustände kann man als nicht existent betrachten.

Nur eine endliche Anzahl von Photonen ist an der Wechselwirkung beteiligt.

P9: Für jedes Paar von "wichtigen" Eigenzuständen $\mu_{a_j}^j(x), \mu_{a_j'}^j(x)$ von A_j ist das "atomare Übergangselement" definiert als

$$M_j^*(a_j, a_j'; k; x_j(t)) := e^{i k x_j(t)} \frac{e}{((2\pi)^3 2k)^{1/2}} \int d^3x' \, e^{i k x'} (\mu_{a_j}^{\dagger\dagger}(x') \otimes \mu_{a_j'}^{\dagger}(x'))_{tr} \quad . \quad (2.12)$$

$M_j^*(a_j, a_j'; k; x_j(t))$ soll für k quadratisch integrierbar sein. Für diskrete Zustände des Dirac-Atoms ist dies nach [5] immer erfüllt.

Falls P1 - P9 erfüllt sind, garantieren [1,5] für alle Zeiten $t < \infty$ die Existenz eines unitären Zeitentwicklungsoperators $U(t)$ für das wechselwirkende System, der die Schrödingergleichung

$$i \frac{d}{dt} U(t) = H_{\mathcal{H}} U(t) \quad , \quad U(0) = 1 \quad (2.13)$$

löst.

2.3 Die Weisskopf-Wigner-Näherung

Der in P7 eingeführte Hilbertraum des wechselwirkenden Systems ist zwar der kleinste, auf welchem die Grundgleichungen (2.1) definiert werden können, für die Quantenoptik ist er aber praktisch zu umfangreich. Die

Weisskopf-Wigner-Näherung besteht gerade in der Einschränkung dieses Raumes, wie sie vor allem in P8 angedeutet wird. Das genaue Näherungsverfahren wollen wir hier beschreiben.

In P2 haben wir zwar die Theorie bereits auf Ein-Elektron-Atome eingeschränkt; die folgenden Postulate haben wir aber allgemein formuliert. Wir wollen zeigen, daß die in P2 enthaltene Voraussetzung zulässig ist und daß sie zu der ersten Einschränkung des Wechselwirkungsraumes führt.

Der Elektronenzahloperator des Atoms A_j

$$N_j^d = \sum_{a_j} b_{a_j}^{+d} b_{a_j}^d \quad (2.14)$$

vertauscht mit dem Hamiltonoperator H_t [1]. Dies bedeutet, daß die Zahl der Elektronen eines jeden Atoms konstant bleibt. Nach [26] zerfällt dann der unitäre Zeitentwicklungsoperator $\mathcal{U}(t)$ in eine direkte Summe von unitären Operatoren $\mathcal{U}_{g_1, \dots, g_j}(t)$, die auf dem Unterraum

$$\mathcal{H}_{g_1, \dots, g_j}^d := \mathcal{H}_{e, g_1}^d \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{e, g_j}^d \otimes \mathcal{F}_p \quad (2.15)$$

von $\mathcal{H}$ definiert sind. $\mathcal{H}_{e, g_j}^d$ sind dabei die g_j -Elektronunterräume von $\mathcal{F}_e^d$.

Dem entsprechend ist H_t ebenfalls eine direkte Summe

$$H_t = \bigoplus_{g_1=1}^{\infty} \dots \bigoplus_{g_j=1}^{\infty} H_{t, g_1, \dots, g_j} \quad (2.16)$$

von Hamiltonoperatoren auf $\mathcal{H}_{g_1, \dots, g_j}^d$. Dies erlaubt es, sich ohne Verlust

auf Ein-Elektron-Atome zu beschränken, die eine Zeitentwicklung innerhalb

des Sektors $\mathcal{H}^d := \mathcal{H}_{1, \dots, 1}^d$ besitzen. Ein Element $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}^d$ hat die Form

$$|\alpha\rangle = \sum_{a_1} \dots \sum_{a_j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{1/2}} \sum_{k_1=1}^3 \dots \sum_{k_j=1}^3 |d^{k_1} \dots d^{k_n}\rangle \xi(k_1, a_1) \otimes \dots \otimes \xi(k_n, a_n) \cdot \\ \cdot \alpha[a_1, \dots, a_j]_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1, a_1}^{+d} \dots a_{k_n, a_n}^{+d} b_{a_1}^{+d} \dots b_{a_j}^{+d} |v_e\rangle |v_p\rangle. \quad (2.17)$$

$|\alpha(t)\rangle = \mathcal{U}_{\mathcal{H}^d}(t) |\alpha\rangle$ bildet eine Kurve in $\mathcal{H}^d$, die durch die Schrödinger-gleichung

$$i \frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle = H_t |\alpha(t)\rangle, \quad |\alpha(0)\rangle = |\chi\rangle, \quad (2.18)$$

mit einem beliebigen $|\chi\rangle \in \mathcal{H}^d$ als Anfangszustand gegeben ist.

Wir können jetzt die eigentliche Weisskopf-Wigner-Näherung, wie sie in P8 formuliert ist, beschreiben: Unter den möglichen Zuständen der Atome suchen wir solche aus, die nach physikalischen Überlegungen und Erfahrungen

für das betrachtete Problem wichtig sind. Für das Atom A_j sollen es endlich viele Zustände $u_{a_j}^j(k)$ der Quantenzahlen a_j sein; die endliche Menge dieser Quantenzahlen a_j soll Q_j sein. Aus physikalischen Überlegungen wählen wir auch die endliche Höchstzahl m der an der Wechselwirkung beteiligten Photonen; $N^m := \{0, 1, \dots, m\}$. Die endliche, aber beliebig hohe Zahl der Zustände, sowie endliche, aber beliebig hohe Zahl der Photonen garantiert die Existenz einer endlichen Lösung [1]. Die endliche Indexmenge $I := Q_1 \times \dots \times Q_n \times N^m$ charakterisiert die gewählte Weisskopf-Wigner-Näherung. Das Näherungsverfahren selbst besteht nun darin [1, 4, 5], in dem Hamiltonoperator der Theorie, ausgedrückt in den Amplituden nach (2.17), alle Amplituden $\alpha[t; a_1, \dots, a_n]_{\mathbf{a}}(k_1, \dots, k_n)$ identisch Null zu setzen, wenn $(a_1, \dots, a_n, \mathbf{a}) \notin I$.

Die Weisskopf-Wigner-Theorie wird dann auf dem Hilbertraum

$$\mathcal{H}(I) := \bigoplus_{(a_1, \dots, a_n, \mathbf{a}) \in I} \mathcal{H}_{\omega}^{(a_1, \dots, a_n)} \quad (2.19)$$

definiert, die Schrödinger-Bewegungsgleichungen für diese Indexmenge lauten dann

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \alpha[t; a_1, \dots, a_n]_{\mathbf{a}}(k_1, \dots, k_n) = & \\ = (k_1 + \dots + k_n + E_{a_1}^j + \dots + E_{a_n}^j) \alpha[t; a_1, \dots, a_n]_{\mathbf{a}}(k_1, \dots, k_n) + & \quad (2.20) \\ + (i\omega)^{-1/2} \sum_{j=1}^n \sum_{(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n, \mathbf{a}) \in I} \sum_{\mathbf{a}'} M_j^*(a_j, a_j', k_j, k_j') e^{ik_j' x_j - iE_{a_j'}^j t} & \\ \cdot \alpha[t; a_1, \dots, a_{j-1}, a_j', a_{j+1}, \dots, a_n]_{\mathbf{a}'}(k_1, k_2, \dots, k_n) + & \\ + (i\omega)^{-1/2} \sum_{j=1}^n \sum_{(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n, \mathbf{a}) \in I} \sum_{\mathbf{a}'} M_j(a_j', a_j, k_j, k_j') e^{ik_j x_j - iE_{a_j}^j t} & \\ \cdot \alpha[t; a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n]_{\mathbf{a}'}(k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_n), & \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\alpha[0, a_1, \dots, a_n]_{\mathbf{a}}(k_1, \dots, k_n) = \chi[a_1, \dots, a_n]_{\mathbf{a}}(k_1, \dots, k_n), \quad (a_1, \dots, a_n, \mathbf{a}) \in I. \quad (2.21)$$

Das letzte Glied in (2.19) ist für $n = 0$ Null zu setzen. Für das atomare Übergangselement haben wir (2.2) und (2.12) benutzt:

$$M_j^*(a_j, a_j', k_j, k_j') = M_j^*(a_j, a_j', k_j, k_j') e^{ik_j' x_j - iE_{a_j'}^j t} = M_j^*(a_j, a_j', k_j) e^{ik_j' x_j - iE_{a_j'}^j t} \quad (2.22)$$

§3. Eine Weisskopf-Wigner-Theorie J bewegter Atome und eines Photons

Wir wollen in diesem § die niedrigste Weisskopf-Wigner-Näherung für das System von J bewegten Atomen in Wechselwirkung mit einem Photon untersuchen. Die Erfüllung der im §2 formulierten Postulate P1-P9 garantiert nach [1] die Existenz einer eindeutigen endlichen Lösung. Diese Lösung werden wir explizite angeben und diskutieren. Von Interesse wird vor allem der Einfluß der Bewegung der Atome, sowie der Aufbau der Lösungsamplituden aus den Anfangsamplituden sein. Wir zeigen, daß die nichtrelativistische Atomenbewegung zur "richtigen" Doppler-Verschiebung der Emissions- und Absorptionsfrequenzen der Atome und zur Linienverbreiterung führt. Der "kausale" Aufbau der Lösungsamplituden aus den Anfangsbedingungen mittels der zwei Grundprozesse - spontaner Emission und Resonanzfluoreszenz, wie wir ihn aus der Weisskopf-Wigner-Theorie ruhender Atome kennen [8,10], bleibt erhalten.

3.1 Bewegungsgleichungen

Die im §2 formulierten Grundsätze der Weisskopf-Wigner-Theorie wollen wir auf das gewählte System anwenden. Vor allem müssen wir die Auswahl der physikalisch wichtigen Zustände des Wechselwirkungssystems durchführen: erfahrungsgemäß [20] ist es in der Quantenoptik zulässig, zumindest für die ersten Untersuchungen, die betrachteten Atome als Zwei-Niveau-Atome zu behandeln. Darüber hinaus wollen wir nur Bohr'sche Übergänge zulassen, d.h. beim Übergang eines Atoms vom unteren (oberen) in den oberen (unteren) Zustand wird genau ein Photon absorbiert (emittiert). Dies führt zu der endlichen Indexmenge der niedrigsten Weisskopf-Wigner-Näherung des Systems

$$I_0^{J,A} = \{(a_1, \dots, a_J, 1), (b_1, a_2, \dots, a_J, 0), \dots, (a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \dots, a_J, 0), \dots, (a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, 0)\}, \quad (3.1)$$

Die "wichtigen" Zustände des Systems sind also die $J+1$ Zustände:

- (i) Alle Atome im unteren Zustand a_j , $j=1, \dots, J$; ein Photon vorhanden.
- (ii) Atom A_j im oberen Zustand b_j , alle übrigen Atome im unteren Zustand a_j , $j=1, \dots, J$, $j' \neq j$; kein Photon vorhanden.

Mit der Annahme $\Delta_j := E_{b_j}^0 - E_{a_j}^0 \gg \varepsilon > 0$, wobei ε die Größenordnung des Lamb-shifts hat, vermeiden wir nach [6] Probleme, die mit "gebundenen" Photonen verquickt sind. O.E.d.A. können wir wählen $\sum_{j=1}^J E_{a_j}^0 = 0$. Mit der Bezeichnung $M_j(b_j, x_j^0) := M_j(b_j, a_j, b_j, x_j^0)$ erhalten wir aus (2.20) die Schrödinger-Bewegungsgleichungen

$$i \frac{\partial}{\partial t} \alpha[t, a_1, \dots, a_J, b_1, a_{j+1}, \dots, a_J]_0 = \Delta_j \alpha[t, a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \dots, a_J]_0 + \int d^3k M_j(b_j, x_j^0) e^{-i \varepsilon x_j^0 t} \alpha[t, a_1, \dots, a_J]_1(k), \quad j=1, \dots, J, \quad (3.2a)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \alpha[t, a_1, \dots, a_J]_1(k) = k \alpha[t, a_1, \dots, a_J]_1(k) + \sum_{j=1}^J M_j(b_j, x_j^0) e^{-i \varepsilon x_j^0 t} \alpha[t, a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \dots, a_J]_0 \quad (3.2b)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\alpha[0, a_1, \dots, a_J, b_1, a_{j+1}, \dots, a_J]_0 = C^j, \quad j=1, \dots, J, \quad \alpha[0, a_1, \dots, a_J]_1(k) = C^0 \chi(k). \quad (3.2c)$$

Dabei gilt die Normierungsbedingung $\sum_{j=1}^J |C^j|^2 + |C^0|^2 = 1$, $\int d^3k \chi(k) \chi^*(k) = 1$.

Die Geschwindigkeit v_j des Atoms A_j soll nichtrelativistisch sein, also

$$|v_j| \ll 1 \quad \text{für } j=1, \dots, J.$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformation können wir dieses Gleichungssystem lösen. Nach [21] erhalten wir aus (3.2)

$$i(s A_j(s)_0 - C^j) = \Delta_j A_j(s)_0 + \int d^3k M_j(b_j, x_j^0) A(s + i \varepsilon x_j^0)_1(k), \quad j=1, \dots, J, \quad (3.3a)$$

$$i(s A(s)_1(k) - C^0 \chi(k)) = k A(s)_1(k) + \sum_{j=1}^J M_j(b_j, x_j^0) A_j(s + i \varepsilon x_j^0)_0, \quad (3.3b)$$

wobei $A_j(s)_0$ bzw. $A(s)_1(k)$ die Laplace-Transformierte von $\alpha[t, a_1, \dots, a_J, b_1, a_{j+1}, \dots, a_J]_0$ bzw. $\alpha[t, a_1, \dots, a_J]_1(k)$ ist.

Aus (3.3) lässt sich $A(s)_1(k)$ eliminieren:

$$A(s)_1(k) = C^0 \frac{\chi(k)}{s + ik} - i \sum_{j=1}^J \frac{M_j(b_j, x_j^0)}{s + ik} A_j(s + i \varepsilon x_j^0)_0, \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned}
 (s+i\Delta_j)A_j(s)_0 + \sum_{j=1}^J \int d^3k \frac{M_j^*(k;Y_j^*)M_j(k;Y_j^*)}{s+i(k-k_{Y_j})} A_j(s-i(k_{Y_j}-Y_j))_0 = \\
 = c^j - i c^j \int d^3k \frac{M_j^*(k;Y_j^*)Z(k)}{s+i(k-k_{Y_j})}, \quad j=1, \dots, J.
 \end{aligned} \quad (3.4b)$$

Mit den Abkürzungen

$$\Gamma_{jj}^*(s, Y_j - Y_j) = \int d^3k \frac{M_j^*(k;Y_j^*)M_j(k;Y_j^*)}{s+i(k-k_{Y_j})} \mathcal{P}(-i(k_{Y_j}-Y_j)), \quad j=1, \dots, J, \quad (3.5)$$

wobei $\mathcal{P}(ia)$ ein Operator (siehe Anhang A) ist, der auf Funktionen der Variablen s wie folgt wirkt:

$$\mathcal{P}(ia)f(s) := f(s+ia), \quad (3.6)$$

$$G_j^Z(s) := \int d^3k \frac{M_j^*(k;Y_j^*)Z(k)}{s+i(k-k_{Y_j})}, \quad j=1, \dots, J \quad (3.7)$$

und

$$A_j^{\text{sp}}(s) := \frac{1}{s+i\Delta_j + \Gamma_{jj}^*(s;0)}, \quad j=1, \dots, J \quad (3.8)$$

erhalten wir aus (3.4b)

$$\begin{pmatrix} 1 & , & A_1^{\text{sp}}(s) \Gamma_{12}^*(s; Y_1 - Y_2) & , & \dots & , & A_1^{\text{sp}}(s) \Gamma_{1J}^*(s; Y_1 - Y_J) \\ A_2^{\text{sp}}(s) \Gamma_{21}^*(s; Y_2 - Y_1) & , & 1 & , & \dots & , & A_2^{\text{sp}}(s) \Gamma_{2J}^*(s; Y_2 - Y_J) \\ \vdots & , & \vdots & , & \ddots & , & \vdots \\ A_J^{\text{sp}}(s) \Gamma_{J1}^*(s; Y_J - Y_1) & , & A_J^{\text{sp}}(s) \Gamma_{J2}^*(s; Y_J - Y_2) & , & \dots & , & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} A_1(s)_0 \\ A_2(s)_0 \\ \vdots \\ A_J(s)_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{\text{sp}}(s) (c^1 - i c^j G_1^Z(s)) \\ A_2^{\text{sp}}(s) (c^2 - i c^j G_2^Z(s)) \\ \vdots \\ A_J^{\text{sp}}(s) (c^J - i c^j G_J^Z(s)) \end{pmatrix}.$$

Nach dem Anhang B läßt sich (3.9) für s mit $\text{Re } s \geq z$, z gegebene große positive reelle Zahl²⁾, lösen; wir erhalten mit (3.4a):

$$A_j(s)_0 = \sum_{j'=1}^J D_{jj'}(1, \dots, J)_j(s) A_{j'}^{sp}(s) (c^{j'} - i c^0 G_{j'}^{\frac{z}{s}}(s)), \quad j=1, \dots, J \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \\ A(s)_1(s) = c^0 \frac{z(s)}{s+iR} - i \sum_{j=1}^J \frac{M_j(s; \mathcal{J}_j^s)}{s+iR} \sum_{j'=1}^J D_{jj'}(1, \dots, J)_j(s+iR \mathcal{J}_j^s) \cdot \\ \cdot A_{j'}^{sp}(s+iR \mathcal{J}_j^s) (c^{j'} - i c^0 G_{j'}^{\frac{z}{s}}(s+iR \mathcal{J}_j^s)). \end{aligned} \quad (3.10b)$$

Dabei sind $D_{jj'}(1, \dots, J)_j(s)$ durch die in J rekursive Vorschrift gegeben (siehe Anhang B):

$$D_{jj}(j)_j(s) = 1, \quad j=1, \dots, J, \quad (3.11a)$$

$$\begin{aligned} D_{jj}(1, \dots, J)_j(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{J-1} \sum_{(j_1, \dots, j_m)}^{(1, \dots, J|j)} P \{ A_j^{sp}(s) (-\Gamma_{jj_1}^1(s; \mathcal{J}_j - \mathcal{J}_{j_1}^s)) D_{jj_1}(1, \dots, J|j)_{j-1}(s) \cdot \right. \\ \cdot \prod_{n=1}^{m-1} [A_{j_n}^{sp}(s) (-\Gamma_{jj_n}^1(s; \mathcal{J}_j - \mathcal{J}_{j_n}^s - \mathcal{J}_{j_{n+1}}^s)) D_{jj_{n+1}j_{n+1}}(1, \dots, J|j, j_1, \dots, j_m)_{j-(n+1)}(s)] \cdot \\ \cdot A_{j_m}^{sp}(s) (-\Gamma_{jj_m}^1(s; \mathcal{J}_j - \mathcal{J}_{j_m}^s - \mathcal{J}_j^s)) \} \Big]^{1/n}, \quad j=1, \dots, J, \quad J \in \mathbb{N}, \quad J \geq 2, \end{aligned} \quad (3.11b)$$

$$\begin{aligned} D_{jj}(1, \dots, J)_j(s) = D_{jj}(1, \dots, J)_j(s) [A_j^{sp}(s) (-\Gamma_{jj}^1(s; \mathcal{J}_j - \mathcal{J}_j^s)) D_{jj}(1, \dots, J|j)_{j-1}(s) + \\ + \sum_{n=1}^{J-1} \sum_{(j_1, \dots, j_n)}^{(1, \dots, J|j)} P \{ A_j^{sp}(s) (-\Gamma_{jj_1}^1(s; \mathcal{J}_j - \mathcal{J}_{j_1}^s)) D_{jj_1}(1, \dots, J|j)_{j-1}(s) \cdot \\ \cdot \prod_{n=1}^{n-1} [A_{j_n}^{sp}(s) (-\Gamma_{jj_n}^1(s; \mathcal{J}_j - \mathcal{J}_{j_n}^s - \mathcal{J}_{j_{n+1}}^s)) D_{jj_{n+1}j_{n+1}}(1, \dots, J|j, j_1, \dots, j_n)_{j-(n+1)}(s)] \cdot \\ \cdot A_{j_n}^{sp}(s) (-\Gamma_{jj_n}^1(s; \mathcal{J}_j - \mathcal{J}_{j_n}^s - \mathcal{J}_j^s)) D_{jj_n}(1, \dots, J|j, j_1, \dots, j_n)_{j-(n+1)}(s) \} \Big], \\ j, j' = 1, \dots, J, \quad j \neq j', \quad J \in \mathbb{N}, \quad J \geq 2. \end{aligned} \quad (3.11c)$$

Fußnote 2):

Die Tatsache, daß die Existenz der Lösungen (3.10) nur für s mit $\text{Re } s \geq z$ für reelles positives z gesichert ist, spielt in unseren Betrachtungen keine große Rolle. Für die eindeutige Existenz der Laplace-Rücktransformatierten von (3.10) ist es ausreichend, wenn die Lösungen in einer Halbebene $\text{Re } s \geq z$ existieren. Für den Bereich $0 \leq \text{Re } s < z$ können wir die Lösungen analytisch fortsetzen. Die Rücktransformatierte der analytischen Fortsetzung stimmt mit der Rücktransformatierten der Lösung überein [21]. Die Existenz einer Lösung von (3.2) ist also für alle Zeiten $t \geq 0$ gesichert.

Hier ist $(1, \dots, J | j_1, \dots, j_n)_{J-n}$ die $J-n$ -Elementenmenge, die aus $1, \dots, J$ durch Weglassen der Elemente $j_1, \dots, j_n$ entsteht, und $\sum_{(j_1, \dots, j_n)}^{(1, \dots, J)} f(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$ die Summe über die $\binom{J}{n} n!$ Variationen [27] der Indizes $j_1, \dots, j_n$ aus der Menge $(1, \dots, J)$, $n \leq J$. D.h. es ist $\sum_{(j_1, \dots, j_n)}^{(1, \dots, J)} f(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) =$

$$= f(x_1, \dots, x_n) + \dots + f(x_1, \dots, x_n) + \dots + f(x_{J-n+1}, \dots, x_J) + \dots + f(x_1, \dots, x_{J-n}) + \dots$$

wobei genau über $\binom{J}{n} n!$ Summanden summiert wird. Bei $n=J$ geht diese Variationssumme in die bekannte Permutationssumme [4,10,22] über. Die Konvergenz von (3.11b) ist nach Anhang B für s mit $\text{Re } s \geq z$, für ausreichend großes reelles positives z gesichert.

(3.10) mit (3.11) geben vollständig die Lösung der Bewegungsgleichungen an. Um diese Lösung in den Zeit-Raum rücktransformieren und sie diskutieren zu können, müssen wir die in ihr enthaltenen Ausdrücke im einzelnen untersuchen.

3.2 Spontane Amplitude des Atoms A_j ; Exponentialnäherung

Die Untersuchung der Ausdrücke, die in der Lösung der Bewegungsgleichungen enthalten sind, wollen wir mit der Amplitude $A_j^{\text{sp}}(s)$, nach (3.8)

$$A_j^{\text{sp}}(s) = \frac{1}{s + i\Delta_j + \int d^3k \frac{B_j^{\text{sp}}(k; k_1^0) A_j^{\text{sp}}(k; k_1^0)}{s + i(k - k_1^0)}} \quad (3.12)$$

beginnen. Im Abschnitt 3.3 werden wir zeigen, daß diese Amplitude den spontanen Zerfall des angeregten Atoms A_j in Abwesenheit anderer Atome beschreibt.

Die erste Frage, die uns beschäftigt, ist, in welcher Weise diese spontane Amplitude von der Bewegung des Atoms abhängig ist. Dazu wenden wir die Identität

$$\frac{1}{s + A - B} = \frac{1}{s + A} + \frac{B}{(s + A)^2} + \frac{B^2}{(s + A)^3 (s + A - B)} \quad (3.13)$$

auf das Integral in (3.12) an:

$$\int d^3k \frac{M_j^*(k; X_j^0) M_j(k; X_j^0)}{s + i(k - b \cdot x_j)} = \int d^3k \frac{M_j^*(k; X_j^0) M_j(k; X_j^0)}{s + i k} +$$

$$+ i \int d^3k \frac{M_j^*(k; X_j^0) M_j(k; X_j^0) b \cdot x_j}{(s + i k)^2} = \int d^3k \frac{M_j^*(k; X_j^0) M_j(k; X_j^0) (b \cdot x_j)^2}{(s + i k)^2 (s + i(k - b \cdot x_j))} \quad (3.14)$$

Nach (2.12) und (2.22) gilt aber

$$M_j^*(-k; X_j^0) = e^{-i b \cdot X_j^0} M_j^*(b_j; a_j; -k) =$$

$$= e^{-i b \cdot X_j^0} \frac{e}{(2k(2\pi)^3)^{1/2}} \int d^3x e^{-i b \cdot x} (M_{b_j}^{*j}(x) \otimes M_{a_j}^j(x))_{tr} =$$

$$= e^{-i b \cdot X_j^0} \frac{e}{(2k(2\pi)^3)^{1/2}} \int d^3(-x) e^{i b \cdot (-x)} (-1)^{p(b_j; a_j)} M_{b_j}^{*j}(-x) \otimes M_{a_j}^j(-x)_{tr} =$$

$$= e^{-i b \cdot X_j^0} (-1)^{p(b_j; a_j)} M_j^*(b_j; a_j; k)$$

und

$$M_j(-k; X_j^0) = e^{i b \cdot X_j^0} (-1)^{p(b_j; a_j)} M_j(b_j; a_j; k), \quad (3.15b)$$

wobei $p(b_j; a_j) \in \mathbb{Z}$ ein Paritätsfaktor des Stromes ist, der nur von den Zuständen des Atoms abhängig ist. Für wasserstoffähnliche Atome gilt [7]

$p(b_j; a_j) = l_{b_j} + l_{a_j} + 1$, l_{b_j} bzw. l_{a_j} ist die ganzzahlige Bahndrehimpulsquantenzahl des Atoms. Nach (3.15) gilt also

$$M_j^*(-k; X_j^0) M_j(-k; X_j^0) = M_j^*(k; X_j^0) M_j(k; X_j^0). \quad (3.16a)$$

Da aber

$$(-b) \cdot x_j = - (b \cdot x_j) \quad (3.16b)$$

ist, verschwindet durch die Winkelintegration das zweite Glied auf der rechten Seite von (3.14). Für nichtrelativistische Atomgeschwindigkeiten können wir auch das dritte Glied in (3.14) vernachlässigen. Somit gilt für die spontane Amplitude

$$A_j^{sp}(s) = \frac{1}{s + i \Delta_j + \int d^3k \frac{M_j^*(k; X_j^0) M_j(k; X_j^0)}{s + i k}} \quad (3.17)$$

d.h. bei einer nichtrelativistischen Atombewegung ist die spontane Amplitude von der Geschwindigkeit des Atoms unabhängig und der des ruhenden Atoms gleich [8,9].

Um die Laplace-Rücktransformierte dieser Amplitude "geschlossen" angeben zu können ist es vorteilhaft, eine Sekundärnäherung einzuführen,

die wir Exponentialnäherung (EN) nennen. Die Zulässigkeit dieser Näherung, die einen globalen Eingriff in die Theorie bedeutet, ist ausreichend getestet [10,23]. Sie besteht darin, das Integral in (3.17) durch seinen Limes an der Stelle $s = i\Delta_j$ zu ersetzen, da es an allen anderen Stellen gegenüber $s = i\Delta_j$ vernachlässigbar ist. Weiter nutzen wir aus, daß

$$m_{jj}(k) := k^2 \int d^3\Omega \, U_j^*(\underline{k}; \underline{x}_j^1) U_j(\underline{k}; \underline{x}_j^1), \quad (3.18)$$

wobei $\int d^3\Omega \dots$ das Integral über die Winkel von $\underline{k}$ ist, bei Δ_j eine schwach veränderliche Funktion ist [7]. So kann man $m_{jj}(k)$ durch die Konstante $m_{jj}(\Delta_j)$ ersetzen und diese vor das Integral ziehen. Dabei müssen wir die untere Integralgrenze nach $-\infty$ ausdehnen, um Divergenzen zu vermeiden.

In der Exponentialnäherung ist die spontane Amplitude

$$\begin{aligned} A_j^{\text{sp}}(\Delta) &\stackrel{\text{EN}}{=} \frac{1}{s + i\Delta_j + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dk \frac{m_{jj}(k)}{\epsilon + i(k - \Delta_j)}} = \\ &= \frac{1}{s + i\Delta_j + m_{jj}(\Delta_j) \lim_{\epsilon \rightarrow 0-\infty} \int_0^\infty dk \frac{1}{\epsilon + i(k - \Delta_j)}} = \frac{1}{s + i\Delta_j + \Gamma_j}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

wobei

$$\Gamma_j := \pi \, m_{jj}(\Delta_j) \quad (3.20)$$

ist.

Die Laplace-Rücktransformierte von (3.19) ist

$$\alpha_j^{\text{sp}}(t) = e^{-i\Delta_j t} e^{-\Gamma_j t}, \quad (3.21)$$

der bekannte exponentielle Zerfall eines angeregten Atoms [4,9,11].

Die Interpretation der Lösungen (3.10) der Bewegungsgleichungen wollen wir nun schrittweise durchführen. Dabei untersuchen wir zuerst den Fall $J=1$, um die Doppler-Verschiebung der Emissions- und Absorptionsfrequenz und die Linienverbreiterung festzustellen. Im Falle $J=2$ können wir die ersten Photonlaufzeiteffekte studieren. Zuletzt betrachten wir den allgemeinen Fall $J \geq 2$.

3.3 Ein bewegtes Atom, ein Photon

Zuerst wollen wir den einfachsten Fall $J=1$ betrachten; er ist bereits in [11] ausführlich dargestellt.

Nach (3.10) und (3.11) lautet die Lösung der Bewegungsgleichung

$$A(s)_0 = A^{sp}(s) (c - i c^2 G^X(s)), \quad (3.22a)$$

$$A(s)_1(k) = c^2 \frac{X(k)}{s + i\Gamma} - i \frac{M(k, X^*)}{s + i\Gamma} A^{sp}(s + i\Gamma) (c - i c^2 G^X(s + i\Gamma)), \quad (3.22b)$$

wobei entsprechend (3.7) und (3.19)

$$G^X(s) = \int d^3k \frac{M^*(k, Y) X(k)}{s + i(k - b_X)}, \quad (3.23)$$

$$A^{sp}(s) = \frac{1}{s + i\Delta + \Gamma} \quad (3.24)$$

sind. Die Lösungsamplitude setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: dem spontanen Zerfall ($c=1, c^2=0$) und der Resonanzfluoreszenz ($c=0, c^2=1$).

Wir sehen, daß die Amplitude $A^{sp}(s)$, die wir in Kapitel 3.2 untersucht haben, tatsächlich den spontanen Zerfall eines einzelnen angeregten Atoms beschreibt. Zu den Anfangsbedingungen $c=1, c^2=0$ lauten die Lösungsamplituden:

$$A^{sp}[t; b]_0 = e^{-i\Delta t} e^{-\Gamma t}, \quad (3.25a)$$

$$A^{sp}[t; a]_1(k) = -i M(k, X^*) e^{-i\Delta t} \int_0^t dt' e^{-\Gamma t'} e^{i(k - b_X)t'}. \quad (3.25b)$$

Während die Wahrscheinlichkeit, das Atom im angeregten Zustand anzufinden, wie bei ruhendem Atom exponentiell abnimmt, zeigt die Ein-Photon-Amplitude ein Doppler-verschobenes Maximum der Emissionsfrequenz

$$k_{max} = \Delta / (1 - |X| \cos \vartheta(k, X)), \quad (3.26a)$$

wobei $\vartheta(k, X)$ der Winkel ist, den die Vektoren k und X einschließen. Im Fernfeld, für $t \rightarrow \infty$, nimmt das abgestrahlte Wellenpaket die Form einer Lorentzlinie an [11]. Man sieht leicht, daß die Halbwertslinienbreite Doppler-vergrößert ist:

$$|k_{1/2max} - k_{max}| = \Gamma / (1 - |X| \cos \vartheta(k, X)). \quad (3.26b)$$

Die Lösungsamplituden der Resonanzfluoreszenz mit dem inzidenten Wellenpaket $\chi(k)$ zu der Anfangsbedingung $t=0$, $\psi=1$ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \alpha^{\chi}(t, k) &= e^{-i\Delta t} e^{-i\Gamma t} \int_0^t dt' e^{i\Gamma t'} \int d^3k' \Gamma^{\chi}(k, k') e^{i(k-\Delta-k')t'} \chi(k') = \\ &= e^{-i\Delta t} e^{-i\Gamma t} \int_0^t dt' e^{i\Delta t'} e^{i\Gamma t'} \int d^3k' \Gamma^{\chi}(k, k') e^{-i(k')t'} \chi(k') \end{aligned} \quad (3.27a)$$

und

$$\begin{aligned} \alpha^{\chi}(t, k) &= e^{-i\Delta t} \chi(k) - i e^{-i\Delta t} \Gamma^{\chi}(k, k') \int_0^t dt' e^{-i\Gamma t'} e^{i(k-\Delta-k')t'} \\ &\quad \cdot \int d^3k'' e^{i\Gamma t''} \int d^3k'' \Gamma^{\chi}(k'', k') e^{-i(k'')t''} \chi(k''). \end{aligned} \quad (3.27b)$$

Eine zentrale Rolle spielt bei der Resonanzfluoreszenz die "Überlappungsfunktion"

$$g^{\chi}(t) = -i \int d^3k \Gamma^{\chi}(k, k') e^{i\Delta t} e^{-i\Gamma t} \chi(k) = -i \int d^3k \Gamma^{\chi}(k, k') e^{-i\Delta t} \chi(k), \quad (3.28)$$

die die räumliche Überlappung des Atoms durch das inzidente Wellenpaket beschreibt [8, 11, 22]. Durch Fourier-Transformation in den Ortsraum lässt sich zeigen [11, 22], daß die Überlappungsfunktion $g^{\chi}(t)$ für solche Zeiten t identisch verschwindet, für die das inzidente Wellenpaket den Ort $\underline{x}(t)$ des Atoms nicht überlappt. Die räumliche Überlappung ist die erste Bedingung für das Zustandekommen der Resonanzfluoreszenz; diese Bedingung ist aber nicht ausreichend. Dies sieht man an (3.27a): Der Faktor $e^{i(k-\Delta-k')t}$ in dem Impulsintegral bestimmt die Resonanzfrequenz. Außerhalb dieser Frequenz wird er zur schnell veränderbarer Funktion von k . Somit spielt nur im wesentlichen ein schmaler Frequenzbereich um die Resonanzfrequenz eine Rolle. Wenn aber das inzidente Wellenpaket $\chi(k)$ keine Frequenzen in diesem Bereich enthält, kommt es zur keiner Anregung des Atoms durch die Resonanzfluoreszenz. Die Übereinstimmung der Resonanzfrequenz des Atoms mit der Frequenz des Wellenpakets ist die zweite Bedingung für das Zustandekommen der Resonanzfluoreszenz. Sei t_a die Zeit, zur welchen das Wellenpaket das Atom zu überlappen beginnt, t_e die Zeit, zur welcher die Überlappung be-

endet wurde. Dann gilt

$$\alpha^r[t, b]_0 = 0 \quad \text{für } t < t_a, \quad (3.29)$$

$$\alpha^r[t, b]_0 = \tilde{e}^{i\Delta t} e^{-\Gamma t} G^X \quad \text{für } t \geq t_e,$$

mit

$$G^X = \int_{t_e}^{t_a} dt (-i) \int d^3k M^r(b, k) \tilde{e}^{-i(k - \Delta - \frac{1}{2}\Gamma) t} X(k), \quad (3.30)$$

wobei die Konstante G^X ein Maß für die durch die Resonanzfluoreszenz erfolgte Anregung des Atoms ist. Nach dem Abschluß der Überlappung zerfällt also das Atom spontan. (3.27a) zeigt auch deutlich, daß die Resonanzfrequenz der Absorption nach (3.26a) Doppler-verschoben ist.

Die Ein-Photon-Amplitude der Resonanzfluoreszenz (3.27b) setzt sich aus der Amplitude des "freien Photons" $\tilde{e}^{-ik t} X(k)$ und der Amplitude des vom Atom abgestrahlten Wellenpakets zusammen. Wir sehen leicht, daß in den Fällen, wo das inzidente Wellenpaket entweder das Atom nicht "trifft" oder keine Frequenzen im Resonanzbereich enthält, keine Abstrahlung durch das Atom erfolgt. Hierfür sorgt die Überlappungsfunktion $g^X(t)$, die in der Amplitude des abgestrahlten Wellenpakets enthalten ist. Im Fernfeld zeigt das abgestrahlte Wellenpaket die gleichen Eigenschaften (Lorentz-Form, Doppler-Verschiebung der Emissionsfrequenz und Verbreiterung der Linie nach (3.26)), wie das spontan abgestrahlte Wellenpaket, seine relative Größe ist durch die Konstante G^X nach (3.30) bestimmt.

Die Lösungen (3.22) zu allgemeinen Anfangsbedingungen, die eine Linearkombination der zwei oben untersuchten Einzelfälle sind, können wir also folgendermaßen interpretieren:

- (i) Das angeregte Atom zerfällt exponentiell durch spontanen Zerfall.

Die Art der Anregung ist nach Abschluß des Anregungsprozesses nicht mehr erkennbar. Die nichtrelativistische Bewegung des Atoms hat auf den spontanen Zerfall keinen Einfluß.

- (ii) Die Anregung des Atoms durch ein Wellenpaket mittels Resonanzfluoreszenz setzt eine räumliche Überlappung des Atoms durch das Wellenpaket

sowie eine Frequenzübereinstimmung voraus. Die Bewegung des Atoms führt zu einer Doppler-Verschiebung der Resonanzfrequenz.

(iii) Das vom angeregten Atom abgestrahlte Wellenpaket hat im Fernfeld die Form einer Lorentzlinie. Die Bewegung des Atoms führt zur Doppler-Verschiebung der Emissionsfrequenz und zur Vergrößerung der Linienbreite.

3.4 Zwei bewegte Atome, ein Photon

Nachdem wir den spontanen Zerfall und die Resonanzfluoreszenz eines einzelnen Atoms untersucht haben, können wir mit der Diskussion der Effekte, die vom Austausch des Photons unter den Atomen herrühren, beginnen. Solche Photonlaufzeiteffekte tauchen bereits bei zwei Atomen und einem Photon auf. Für ruhende Atome wurden sie untersucht [8,9], bei bewegten Atomen nur in einer groben Näherung [11].

Die Lösung der Bewegungsgleichungen lautet nach (3.10) und (3.11):

$$A_j(s)_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_j^{\nu}(s)_0, \quad j=1,2, \quad (3.31a)$$

mit

$$\begin{aligned} A_j^{\nu}(s)_0 = & \left\{ A_j^{\nu}(s) (-\Gamma_{j,j+1}(s; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j+1})) A_{j+1}^{\nu}(s) (-\Gamma_{j+1,j}(s; \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j)) \right\}^{\nu} \\ & A_j^{\nu}(s) \cdot \left\{ (C^j - i C^2 G_j^{\mathcal{Z}}(s)) + \right. \\ & \left. + (-\Gamma_{j,j+1}(s; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j+1})) A_{j+1}^{\nu}(s) (C^{j+1} - i C^2 G_{j+1}^{\mathcal{Z}}(s)) \right\}, \\ & j=1,2, \quad j+1 \pmod{2}, \quad \nu=0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (3.31b)$$

und

$$\Delta(s, \underline{k}) = C^2 \frac{\mathcal{X}(\underline{k})}{s + i\kappa} - i \sum_{j=1}^2 \frac{M_j(\underline{k}, \mathbf{x}_j^*)}{s + i\kappa} A_j(s + i\kappa, \mathbf{x}_j)_0. \quad (3.31c)$$

$A_j^{(p)}(s)$, $\Gamma_{j,j+1}(s; \sigma_j - \sigma_{j+1})$ und $G_j^{(X)}(s)$ sind dabei durch (3.5), (3.7) und (3.19) gegeben, $j+1 \pmod{2} = 2$ für $j=1$ und $j+1 \pmod{2} = 1$ für $j=2$. Wir sehen, daß für $A_j^{(p)}(s)$ die Rekursivformel gilt:

$$A_j^{(p)}(s)_0 = \{A_j^{(p)}(s) (-\Gamma_{j,j+1}(s; \sigma_j - \sigma_{j+1})) A_{j+1}^{(p)}(s) (-\Gamma_{j+1,j}(s; \sigma_{j+1} - \sigma_j))\} A_j^{(p-1)}(s)_0, \quad (3.32a)$$

$j=1, 2, \quad j+1 \pmod{2}, \quad p=1, 2, \dots$

und

$$A_j^{(p)}(s)_0 = A_j^{(p)}(s) (c^j - i c^3 G_j^{(X)}(s)) + A_j^{(p)}(s) (-\Gamma_{j,j+1}(s; \sigma_j - \sigma_{j+1})) A_{j+1}^{(p)}(s) (c^{j+1} - i c^3 G_{j+1}^{(X)}(s)), \quad (3.32b)$$

$j=1, 2, \quad j+1 \pmod{2}.$

Den ersten Term in (3.32b) kennen wir bereits aus dem Kapitel 3.3. Es ist die Amplitude für den Zustand "Atom A_j angeregt, kein Photon, andere Atome abwesend", die sich aus der spontanen Emission und der Resonanzfluoreszenz mit dem inzidenten Wellenpaket zusammensetzt. Die spontane Emission ist dabei durch den exponentiellen Zerfall beschrieben, die Resonanzfrequenz ist Doppler-verschoben. Wir wollen diese Amplitude bezeichnen als

$$A_j^{(k)}(s)_0 := A_j^{(p)}(s) (c^j - i c^3 G_j^{(X)}(s)), \quad j=1, 2. \quad (3.33a)$$

Den zweiten Term in (3.32b) können wir mit (3.5), (3.6) und (3.33a) schreiben

$$A_j^{(p+1)}(s)_0 := A_j^{(p)}(s) \int d^3k \frac{(-i) H_j^{(p)}(k; X_j^0) (-i) H_{j+1}^{(p)}(k; X_{j+1}^0)}{s + i(k - k_0 \sigma_j)} A_{j+1}^{(k)}(s - i(k \sigma_j - \sigma_{j+1}))_0, \quad (3.33b)$$

$j=1, 2, \quad j+1 \pmod{2}.$

Diese Amplitude können wir Laplace-rücktransformieren:

$$\alpha_j^{(p+1)}[t]_0 = e^{-i\Delta_j t} e^{-\Gamma_j t} \int_0^t dt' \int d^3k (-i) H_j^{(p)}(k; X_j^0) e^{\Gamma_j t'} e^{-i(k \cdot \Delta_j - k_0 \sigma_j) t'} \cdot \int_0^{t'} dt'' (-i) H_{j+1}^{(p)}(k; X_{j+1}^0) e^{i k t''} e^{-i k_0 \sigma_{j+1} t''} \alpha_{j+1}^{(k)}[t'']_0. \quad (3.34)$$

Nach (3.25b) und (3.27b) ist aber

$$\alpha_j^{(k)}[t]_0 = -i e^{-i k t} H_j^{(p)}(k; X_j^0) \int_0^t dt' e^{i k t'} e^{-i k_0 \sigma_j t'} \alpha_{j+1}^{(k)}[t']_0, \quad j=1, 2 \quad (3.35)$$

gerade die Amplitude des vom Atom A_j in Abwesenheit anderer Atome abgestrahlten Wellenpakets, das im Fernfeld eine Doppler -verschobene und -verbreiterte Lorentzlinie bildet. Das Impulsintegral in (3.34) ist nach (3.28) gerade die Überlappungsfunktion des Atoms A_j durch das frei vom Atom A_{j+1} abgestrahlte

Wellenpaket. Die Amplitude $\alpha_j^{j+1}[t]_0$ beschreibt dann die Resonanzfluoreszenz des Atoms A_j mit dem vom Atom A_{j+1} abgestrahlten Wellenpaket. Wie wir aus Abschnitt 3.3 wissen, ist diese Amplitude nur dann von Null verschieden, wenn das Wellenpaket das Atom räumlich überlappt. Da sich die Photonen mit der Lichtgeschwindigkeit $c=1$ im Raum verbreiten und das Atom A_{j+1} zur Zeit $t=0$ zu zerfallen beginnt, kann $\alpha_j^{j+1}[t]_0$ frühestens zur Zeit $t_a = |x_{j+1} - x_j|$ von Null verschieden sein. Nach der Beendigung der Überlappung beschreibt (3.34) im wesentlichen den exponentiellen Zerfall. Da sowohl die Emissions- wie auch die Absorptionsfrequenz Doppler-verschoben sind, kann es bei größeren Relativgeschwindigkeiten der Atome auch bei gleichen Atomen zur Verstimung kommen, maßgebend dafür ist der Faktor $k(\nu_{j+1} - \nu_j)$.

Die Amplitude

$$\alpha^0[t; b_j, q_{j+1}]_0 = \alpha_j^k[t]_0 + \alpha_j^{j+1}[t]_0, \quad j=1, 2, \quad j+1 \pmod{2}, \quad (3.36)$$

die die Laplace-Rücktransformierte von (3.32b) ist, setzt sich linear aus den beiden untersuchten Amplituden (3.34) und (3.33a) zusammen.

Die Amplitude (3.32a) können wir bereits im s-Bild interpretieren, dabei wollen wir die Erfahrungen nützen, die wir bei den Untersuchungen der Amplitude (3.32b) gesammelt haben. $A_{j+1}(s)_0$ beschreibe die Wahrscheinlichkeit das Atom A_{j+1} im angeregten Zustand vorzufinden. Die Anwendung des Operators $A_j^w(s) (-\Gamma_{jj+1}(s; \nu_j - \nu_{j+1}))$ auf diese Amplitude bedeutet dann den folgenden Prozeß: Das Atom A_{j+1} zerfällt entsprechend der Amplitude $A_{j+1}(s)_0$ und strahlt ein Photon ab. Dieses Photon erreicht nach der Entfernung beider Atome entsprechenden Laufzeit das Atom A_j und wird von diesem Atom durch Resonanzfluoreszenz absorbiert. Die Emission und Absorption des Photons unterliegt der Doppler-Frequenzverschiebung. Die Bedeutung des Operators $A_j^w(s) (-\Gamma_{jj+1}(s; \nu_j - \nu_{j+1}))$ ist also geklärt; wir können deshalb mit der Interpretation von (3.32a) direkt beginnen:

Das Atom A_j befindet sich mit der $A_j^w(s)$ entsprechenden Wahrscheinlichkeit im angeregten Zustand. Mit dem Zerfall des angeregten Zustandes emittiert

das Atom A_j das Photon, welches nach einer Laufzeit, die der Entfernung der Atome entspricht, das Atom A_{j+1} erreicht und von diesem Atom durch Resonanzfluoreszenz absorbiert wird. Durch die Absorption des Photons geht das Atom A_{j+1} in den angeregten Zustand über, der dann exponentiell zerfällt. Bei diesem Zerfall wird vom Atom A_{j+1} das Photon abgestrahlt, welches nach einer Laufzeit, die durch die Entfernung der Atome bestimmt ist, das Atom A_j erreicht, um dort durch Resonanzfluoreszenz absorbiert zu werden. Das Photon durchläuft also eine geschlossene "Schleife" A_j, A_{j+1}, A_j ; bei jeder Emission und Absorption unterliegt es einer Doppler-Frequenzverschiebung.

Die Amplitude des Zustands "Atom A_j angeregt, Atom A_{j+1} im Grundzustand, kein Photon" wird demnach aus folgenden Prozessen zusammengesetzt:

- (i) Das Atom A_j ist entweder anfangs angeregt oder wird durch die Resonanzfluoreszenz mit dem inzidenten Photon angeregt.
- (ii) Das Atom A_j wird durch die Resonanzfluoreszenz mit dem vom Atom A_{j+1} spontan abgestrahlten Photon angeregt.
- (iii) Das angeregte Atom A_j emittiert spontan ein Photon. Das Photon wird vom Atom A_{j+1} durch Resonanzfluoreszenz absorbiert, um wieder spontan abgestrahlt zu werden. Schließlich wird das Photon durch Resonanzfluoreszenz vom Atom A_j reabsorbiert.
- (iv) Der Prozeß (iii) kann beliebig oft wiederholt werden.

Wir sehen, daß alle diese Prozesse aus dem spontanen Zerfall und der Resonanzfluoreszenz aufgebaut werden, und zwar so, daß alle kombinatorischen Möglichkeiten für den Aufbau der Lösungsamplitude aus den Einzelprozessen abgedeckt werden. Die Bewegung der Atome führt lediglich zur Doppler-Verschiebung der Emissions- und Absorptionsfrequenzen und so zur Abschwächung der Emissions-/ Reabsorptionsprozesse. Den physikalisch gut verständlichen Aufbau der Amplituden aus unabhängigen Grundprozessen, der für die Kausalität der Theorie von grundsätzlicher Bedeutung ist [8], stört die Bewegung der Atome nicht. Im Gegenteil, wir haben gesehen, daß die Absorption und

Emission des Photons zur Zeit t immer an dem richtigen Ort des Atoms A_j

$$\underline{x}_j(t) = \underline{x}_j^0 + \underline{v}_j t \quad \text{stattfindet.}$$

Nach (3.32) kann man für die Null-Photonen-Amplitude schreiben

$$A_j(s)_0 = A_j^0(s) \cdot G_j(s), \quad (3.37)$$

mit einem komplexen $G_j(s)$, ist auch die Ein-Photon-Amplitude (3.31c) leicht verständlich. Nach den Untersuchungen im Abschnitt 3.3 ist die Ein-Photon-Amplitude im Fernfeld durch die Summe der Linie des freien inzidenten Wellenpakets und den von den beiden Atomen abgestrahlten Doppler-verschobenen und -verbreiterten Lorentzlinien gegeben.

3.5 J bewegte Atome, ein Photon

Nach den ausführlichen Vorarbeiten können wir mit der Interpretation der allgemeinen Lösung (3.10) beginnen. Die für das Verständnis der Lösung wichtigsten Ausdrücke sind die durch (3.11) gegebenen Elemente $D_{jj'}(1, \dots, J)_j(s)$.

In 3.4 haben wir gesehen, daß $D_{jj'}(1, 2)_2(s)$ die Summe aller "Wege" des Photons vom Atom A_j , zum Atom A_j beschreibt. Unter dem Weg des Photons wollen wir die Folge von Emission, Ausbreitung im Raum und Absorption verstehen. Die Elemente $D_{jj'}(1, \dots, J)_j(s)$ sind aber in (3.11) durch eine in J rekursive Vorschrift gegeben. Wir wollen sie deshalb auch mit Hilfe einer Induktion interpretieren. Für $J=2$ können wir bereits (3.11) als Summe aller Photonenwege verstehen. Wir nehmen an, daß (3.11) für alle $J'=3, \dots, J-1$ die Summe aller möglichen Wege des Photons vom Atom A_j , zum Atom A_j ist, und zeigen, daß dies dann auch für J gilt.

Zuerst betrachten wir (3.11b). $D_{jj'}(1, \dots, J)_j(s)$ soll nach unseren Erwartungen alle geschlossenen Wege des Photons vom A_j zu sich selbst unter Einbeziehung aller Atome $A_1, \dots, A_j$ beschrieben. (3.11b) besteht aus einer unendlichen Summe. Das nullte Glied der Summe ist eine Eins. Sie beschreibt den "einfachsten" Weg - das Photon verläßt das Atom A_j nicht. Das erste

Glied besteht aus einer Summe über $n=1, \dots, J-1$; n ist die Zahl der Atome, die als "Zwischenstationen" am Weg des Photons erscheinen. Diese Zwischenstationen wählen wir aus der Menge aller Atome mit Ausnahme des Atoms A_J . Da auch die Reihenfolge der Zwischenstationen eine Rolle spielt, müssen wir über alle Variationen der Auswahl von n Zwischenstationen aus $J-1$

Atomen summieren; dies besorgt die Variationssumme $\sum_{(j_1, \dots, j_n)}^{(j_1, \dots, j_{J-1})}$, wobei

$A_{j_1}, \dots, A_{j_n}$ die Atome sind, die als Zwischenstationen ausgesucht wurden. Der Ausdruck in den geschweiften Klammern soll also Wege des Photons vom A_J zu A_{j_1} über die fest gewählten Zwischenstationen $A_{j_1}, \dots, A_{j_n}$. Bei der Rücktransformation in den Zeitraum kann man sehen, daß die Amplituden, die links stehen, Prozesse beschreiben, die als letzte ablaufen. Aus diesem Grunde wollen wir die geschweifte Klammer von rechts nach links lesen.

Das erste Glied im Produkt rechts ist $A_{j_n}^{(s)}(-i\Gamma_{j_n}(s; \omega_{j_n} - \omega_{j_1}))$. Nach Abschnitt 3.4 beschreibt es aber genau den Weg des Photons vom Atom A_{j_1} zum Atom A_{j_n} : das Photon wird vom Atom A_{j_1} emittiert und vom Atom A_{j_n} reabsorbiert. Aus der vorhergegangenen Untersuchung wissen wir, daß die Übergangsfrequenzen Doppler-verschoben sind und die Laufzeiteffekte des Photons, die der Entfernung der Atome entsprechen, wiedergegeben werden. Das nächste Glied im Produkt ist $D_{j_{n-1}j_n}(j_1, \dots, j_{J-1}; j_1, \dots, j_{n-1})_{j_{n-1}}(s)$. Nach der Induktionsvoraussetzung beschreibt es die Summe aller Wege des Photons vom Atom A_{j_1} zum Atom $A_{j_{n-1}}$ zurück, wobei die Atome $A_{j_1}, A_{j_1}, \dots, A_{j_{n-1}}$ bei diesen Wegen ausgespart bleiben. Das Photon durchläuft also nur geschlossene Schleifen. Das nächste Glied "transportiert" das Photon zu der nächsten Zwischenstation $A_{j_{n-1}}$ u.s.w. Bei jeder Zwischenstation A_{j_m} werden geschlossene Photonschleifen dazwischengeschaltet, die aber nicht über das Atom A_{j_1} und auch nicht über die noch nicht erreichten Zwischenstationen $A_{j_1}, \dots, A_{j_{m-1}}$ laufen. Dies wird so lange fortgesetzt, bis das Photon über alle Zwischenstationen $A_{j_1}, \dots, A_{j_{n-1}}$ wieder das Atom A_{j_1} erreicht hat. Da wir über die Zahl der möglichen

Zwischenstationen summiert haben und die Zwischenstationen vollständig variiert haben, beschreibt die eckige Klammer die Summe aller Wege des Photons vom A_j zu A_j zurück bei einmaligen Durchlaufen dieser Strecke. Wir wollen diesen Weg trotz seiner Kompliziertheit eine einfache Schleife nennen, weil das Photon vom Atom A_j nur einmal emittiert und einmal absorbiert wurde. Die weiteren Glieder der unendlichen $\sqrt{\nu}$ -Summe in (3.11b) sind dann ebenfalls verständlich - sie beschreiben die $\sqrt{\nu}$ -fache Wiederholung des ersten Gliedes dieser Summe, also eine $\sqrt{\nu}$ -fache Photonschleife vom A_j zu A_j . Der Gesamtausdruck (3.11b) beschreibt, wie wir es angenommen haben, die Summe aller Wege des Photons vom Atom A_j zum demselben Atom A_j zurück.

Man kann sich leicht überzeugen, daß auch (3.11c) entsprechend interpretiert werden kann; $D_{jj'}(1, \dots, j)_j(s)$ ist ebenfalls die nach den Regeln der Kombinatorik aus den Prozessen der spontanen Emission und der Resonanzfluoreszenz zusammengesetzte Summe aller Wege des Photons vom Atom A_j , zum Atom A_j .

Nun kann man die Lösungsamplitude (3.10a) für den Zustand "Atom A_j angeregt, alle übrigen Atome im Grundzustand, kein Photon" gut verstehen: sie baut sich aus der "freien Anregung" des einzelnen Atoms (die entweder durch die anfängliche Anregung des Atoms oder durch die Resonanzfluoreszenz mit dem inzidenten Wellenpaket ohne Einfluß der übrigen Atome entstanden ist) dadurch auf, daß die angeregten Atome spontan zerfallen und das dabei abgestrahlte Photon über eine Reihe von Absorptionen und Emissionen das Atom A_j erreicht und dort absorbiert wird. Die Amplitude (3.10a) ist die Überlagerung aller solchen Prozesse. Wesentlich ist, daß nach Abschluß aller Anregungsprozesse das Atom A_j spontan zerfällt.

So wie im Abschnitt 3.4 kann man sich überzeugen, daß die Ein-Photon-Amplitude im Fernfeld aus der Überlagerung der Linie des freien inzidenten Wellenpakets und der Summe der von jedem Atom abgestrahlten Doppler-verschobenen und -verbreiterten Lorentzlinien besteht.

Wir konnten somit zeigen, daß die Weisskopf-Wigner-Theorie von J Atomen und einem Photon bereits in der niedrigsten Näherung alle komplexen Laufzeiteffekte des Photons wiedergibt. Die Lösungsamplituden setzen sich, den Gesetzen der Kombinatorik folgend, auf kausale Weise [8] aus den Grundprozessen der spontanen Emission und der Resonanzfluoreszenz zusammen. Die nichtrelativistische Bewegung der Atome ändert den spontanen (in der Sekundarnäherung zum Exponentialzerfall gewordenen) Zerfall nicht, die abgestrahlte Lorentzlinie ist Doppler-verschoben und -verbreitert. Die Resonanzfluoreszenz findet am aktuellen Ort des Atoms $\underline{x}_j(t)$ statt, die Resonanzfrequenz ist ebenfalls Doppler-verschoben. Die relative Bewegung der Atome untereinander führt zur Abschwächung der Emissions- /Reabsorptionsprozesse. Dies könnte ein Ansatzpunkt sein, um die Temperatur als ein Parameter der Schwellenbedingung für den Aufbau der Superstrahlung einzuführen.

§4. Eine Weisskopf-Wigner-Theorie von zwei angeregten bewegten Atomen

Wir haben gezeigt, daß bereits die niedrigste Ordnung der Weisskopf-Wigner-Theorie mehrerer bewegter Atome und eines Photons die Photonlaufzeiteffekte voll wiedergibt, die Bewegung der Atome macht sich in "richtigen" Doppler-Verschiebungen der Emissions- und Absorptionsfrequenzen der Atome bemerkbar. In Theorien mit mehreren Photonen treten bereits bei ruhenden Atomen weitere Probleme auf [5,10], z.B. wenn ein angeregtes Atom vom inzidenten Wellenpaket überlappt wird. Dabei verhalten sich Atome wie Photonenzähler: ein angeregtes Atom (besetzter Zähler) kann kein weiteres Photon absorbieren (zählen). Wir werden zeigen, daß dieses Verhalten auch bei bewegten Atomen erhalten bleibt. Dies hat zur Konsequenz, daß die Lösungsamplituden sich aus den zwei Grundprozessen - der spontanen Emission und der Resonanzfluoreszenz - zusammensetzen. Die Bewegung der Atome führt, wie bei einem Photon, zu "richtigen" Doppler-Verschiebungen der Absorptions- und Emissionsfrequenzen der Atome und -Verbreiterung der emittierten Linien.

4.1 Bewegungsgleichungen

Wir wollen zwei bewegte Atome in Wechselwirkung mit zwei Photonen betrachten, wobei anfangs beide Atome angeregt sein sollen. Den Grundsätzen des §2 folgend, wollen wir die niedrigste Näherung der Weisskopf-Wigner-Theorie formulieren. Dazu müssen wir die physikalisch wichtigen Zustände auswählen. Wie im §3, wollen wir Zwei-Niveau-Atome in Verbindung mit den Bohr'schen Übergangsregeln [20] betrachten. Die endliche Indexmenge der niedrigsten Weisskopf-Wigner-Näherung des Systems lautet also

$$I_0^{2,2} = \{ (a_1, a_2; 2), (b_1, a_2; 1), (a_1, b_2; 1), (b_1, b_2; 0) \}, \quad (4.1)$$

die "wichtigen" Zustände des Systems sind also die 4 Zustände:

- (i) Beide Atome im unteren Zustand a_j , $j=1,2$; zwei Photonen vorhanden.
 (ii) Ein Atom im unteren Zustand a_j , das andere Atom im oberen Zustand b_{j+1} , $j=1,2$, $j+1 \pmod{2}$; ein Photon vorhanden.
 (iii) Beide Atome im oberen Zustand b_j , $j=1,2$; kein Photon vorhanden.

Mit der Annahme $\Delta_j := E_{b_j}^j - E_{a_j}^j \gg \epsilon > 0$, wobei ϵ die Größenordnung des Lambshifts hat, vermeiden wir, wie im §3, die Probleme, die mit "gebundenen" Photonen verbunden sind [6]. O.B.d.A. wählen wir wieder $E_{a_e}^1 + E_{a_e}^2 = 0$ und kürzen ab $M_j^*(k; X_j^0) := M_j^*(b_j, a_j; k; X_j^0)$. Aus (2.20) erhalten wir die Schrödingergleichungen

$$i \frac{d}{dt} \alpha[t; b_1, b_2]_0 = (\Delta_1 + \Delta_2) \alpha[t; b_1, b_2]_0 +$$

$$+ \int d^3k \underline{M}_1^*(k; X_1^0) e^{i k_1 x_1 t} \alpha[t; a_1, b_2]_1(k) + \quad (4.2a)$$

$$+ \int d^3k \underline{M}_2^*(k; X_2^0) e^{i k_2 x_2 t} \alpha[t; b_1, a_2]_1(k),$$

$$i \frac{d}{dt} \alpha[t; b_1, a_2]_1(k_1) = (\Delta_1 + k_1) \alpha[t; b_1, a_2]_1(k_1) +$$

$$+ \sqrt{2} \int d^3k \underline{M}_1^*(k; X_1^0) e^{i k_1 x_1 t} \alpha[t; b_1, a_2]_2(k, k_1) + \quad (4.2b.a)$$

$$+ \underline{M}_2(k_1; X_2^0) e^{-i k_1 x_2 t} \alpha[t; b_1, b_2]_0,$$

$$i \frac{d}{dt} \alpha[t; a_1, b_2]_1(k_1) = (\Delta_2 + k_1) \alpha[t; a_1, b_2]_1(k_1) +$$

$$+ \sqrt{2} \int d^3k \underline{M}_2^*(k; X_2^0) e^{i k_2 x_2 t} \alpha[t; a_1, a_2]_2(k, k_1) + \quad (4.2b.b)$$

$$+ \underline{M}_1(k_1; X_1^0) e^{-i k_1 x_1 t} \alpha[t; b_1, b_2]_0,$$

$$i \frac{d}{dt} \alpha[t; a_1, a_2]_2(k_1, k_2) = (k_1 + k_2) \alpha[t; a_1, a_2]_2(k_1, k_2) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \underline{M}_1(k_1; X_1^0) e^{-i k_1 x_1 t} \alpha[t; b_1, a_2]_1(k_2) + \right.$$

$$+ \underline{M}_1(k_2; X_1^0) e^{-i k_2 x_1 t} \alpha[t; b_1, a_2]_1(k_1) + \quad (4.2c)$$

$$+ \underline{M}_2(k_1; X_2^0) e^{-i k_1 x_2 t} \alpha[t; a_1, b_2]_1(k_2) +$$

$$+ \underline{M}_2(k_2; X_2^0) e^{-i k_2 x_2 t} \alpha[t; a_1, b_2]_1(k_1) \left. \right\}.$$

Hierbei sind $\alpha [t; a_i, a_i]_n(k_1, \dots, k_n)$ Tensoren n-ter Stufe in einem $3n$ -dimensionalen Raum, der durch die Polarisationsvektoren der Photonen aufgespannt ist. Die entsprechenden Einheitspolarisationsvektoren $\underline{\epsilon}(k,1)$, $\underline{\epsilon}(k,2)$ des transversalen Photons besitzen pro Photon nur zwei Freiheitsgrade. Nach (2.7) können wir schreiben

$$\underline{\alpha}[t; \dots]_2(k_1) = \underline{\epsilon}(k_1,1) \alpha[t; \dots]_1(1, k_1) + \underline{\epsilon}(k_1,2) \alpha[t; \dots]_1(2, k_1)$$

und

$$\underline{\alpha}[t; \dots]_2(k_1, k_2) = \sum_{\lambda_1=1}^2 \sum_{\lambda_2=1}^2 \underline{\epsilon}(k_1, \lambda_1) \otimes \underline{\epsilon}(k_2, \lambda_2) \alpha[t; \dots]_2(\lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2).$$

Entsprechende Eigenschaften besitzen auch die atomaren Übergangselemente $M_j^{\mu}(k_i, X_j^0)$, die durch (2.12) und (2.22) definiert sind. Das Zeichen $\otimes$ bedeutet ein Tensorprodukt in diesen "Polarisationsräumen".

Als Anfangsbedingung wählen wir den Zustand "beide Atome angeregt, kein Photon", also

$$\alpha [0; b_1, b_2]_0 = 1, \\ \alpha [0; b_1, a_2]_1(k_1) = \alpha [0; a_1, b_2]_1(k_1) = \alpha [0; a_1, a_2]_2(k_1, k_2). \quad (4.3)$$

Auch in diesem § wollen wir uns auf nichtrelativistische Geschwindigkeiten der Atome beschränken, also $\|v_j\| \ll 1$ für $j=1,2$.

Um die Lösung des Gleichungssystems (4.2) zu finden, ist es sinnvoll, den folgenden "Separationsansatz" zu machen:

$$\alpha [t; b_1, b_2]_0 = \beta_2 [t; 1, 2]_0, \\ \alpha [t; b_1, a_2]_1(k_1) = \sum_{j=1}^2 M_j^{\mu}(k_1, X_j^0) \beta_1 [t, 1]_1(j, k_1), \\ \alpha [t; a_1, b_2]_1(k_1) = \sum_{j=1}^2 M_j^{\mu}(k_1, X_j^0) \beta_1 [t, 2]_1(j, k_1), \\ \alpha [t; a_1, a_2]_2(k_1, k_2) = \sum_{j_1, j_2=1}^2 M_{j_1}^{\mu}(k_1, X_{j_1}^0) \otimes M_{j_2}^{\mu}(k_2, X_{j_2}^0) \beta_0 [t, 2]_2(j_1, k_1, j_2, k_2). \quad (4.4)$$

Die Bedeutung der Indizes der β -Funktionen ist:

Die Zahlen in der eckigen Klammer geben die Atome an, die angeregt sind; ihre Anzahl wird durch den Index vor der Klammer bestimmt.

Der Index hinter der eckigen Klammer gibt die Zahl der Photonen an. In

der runden Klammer stehen Paare der Ordnungsnummer eines Atoms und eines Wellenvektors. Gerade die "Winkelcharakteristik" des Übergangselements des genannten Atoms mit dem dazugehörigen Wellenvektor wurde abgespalten. Dieser Ansatz führt bei ruhenden Atomen zur Separation der Polarisations- und Winkel- von Radialanteilen [4,10], d.h. zur Aufspaltung der Abhängigkeit der Lösung von geometrischen und dynamischen Eigenschaften des Systems. Bei bewegten Atomen wird durch den Ansatz (4.4) nur der Polarisationsanteil absepariert, da durch die Bewegung der Atome auch die Geometrie des Systems dynamisch wird. Deshalb kann eine solche vollständige Separation nicht erfolgen. Die Winkelabhängigkeit in den β -Amplituden ist aber auf die "dynamische" Abhängigkeit eingeschränkt, die durch die Bewegung der Atome bedingt ist.

Durch einfaches Einsetzen kann man sich überzeugen, daß die α -Funktionen genau dann die Gleichungen (4.2) mit den Anfangsbedingungen (4.3) lösen, wenn die β -Funktionen eine Lösung von

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dt} \beta_2 [t; 1, 2]_0 &= (\Delta_1 + \Delta_2) \beta_2 [t; 1, 2]_0 + \\
 &+ \int d^3 k \, \tilde{M}_1^*(\underline{k}; \underline{x}_1^0) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}_1^0} \{ \tilde{M}_1(\underline{k}; \underline{x}_1^0) \beta_1 [t; 2]_1(1, \underline{k}) + \\
 &+ \tilde{M}_2(\underline{k}; \underline{x}_2^0) \beta_1 [t; 2]_1(2, \underline{k}) \} + \\
 &+ \int d^3 k \, \tilde{M}_2^*(\underline{k}; \underline{x}_2^0) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}_2^0} \{ \tilde{M}_1(\underline{k}; \underline{x}_1^0) \beta_1 [t; 1]_1(1, \underline{k}) + \\
 &+ \tilde{M}_2(\underline{k}; \underline{x}_2^0) \beta_1 [t; 1]_1(2, \underline{k}) \} , \quad (4.5a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dt} \beta_1 [t; j]_1(\ell, \underline{k}_\ell) &= (\Delta_j + k_\ell) \beta_1 [t; j]_1(\ell, \underline{k}_\ell) + \\
 &+ \int d^3 k \, \tilde{M}_j^*(\underline{k}; \underline{x}_j^0) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}_j^0} \{ \tilde{M}_1(\underline{k}; \underline{x}_1^0) \beta_0 [t]_2(1, \underline{k}, \ell, \underline{k}_\ell) + \\
 &+ \tilde{M}_2(\underline{k}; \underline{x}_2^0) \beta_0 [t]_2(2, \underline{k}, \ell, \underline{k}_\ell) \} + \\
 &+ e^{-i \underline{k}_\ell \cdot \underline{x}_\ell^0} \beta_2 [t; j, \ell]_0 , \quad j, \ell = 1, 2, \quad (4.5b)
 \end{aligned}$$

wobei $\beta_2 [t; j, \ell]_0 = \beta_2 [t; \ell, j]_0$ und $\beta_2 [t; j, \ell] = 0$ für $j = \ell$,

und

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dt} \beta_0 [1]_2(j, k_1, \ell, k_2) = & (k_1 + k_2) \beta_0 [1]_2(j, k_1, \ell, k_2) + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ik_1 x_1^0} \beta_1 [1]_1(j, k_2) + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ik_2 x_2^0} \beta_1 [1]_1(j, k_1), \quad (4.5c)
 \end{aligned}$$

$j, \ell = 1, 2,$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
 \beta_2 [0; 1, 2]_0 = 1, \quad \beta_1 [0; j]_1(\ell, k_1) = \beta_0 [0]_2(j, k_1, \ell, k_2) = 0, \\
 j, \ell = 1, 2 \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

sind.

4.2 Lösung der Bewegungsgleichungen

Um die Lösungen des Gleichungssystems (4.5) zu finden, die eindeutig die Lösungen von (4.2) bestimmen, verwenden wir die Laplace-Transformation [21]. Dann ist:

$$\begin{aligned}
 i(s B_2 [s; 1, 2]_0 - 1) = & (\Delta_1 + \Delta_2) B_2 [s; 1, 2]_0 + \\
 & + \int d^3 k \, M_1^*(k; X_1^0) \{ M_1(k; X_1^0) B_1 [s - i k x_1, 2]_1(1, k) + \\
 & + M_2(k; X_2^0) B_1 [s - i k x_2, 2]_1(2, k) \} + \\
 & + \int d^3 k \, M_2^*(k; X_2^0) \{ M_1(k; X_1^0) B_1 [s - i k x_2, 1]_1(1, k) + \\
 & + M_2(k; X_2^0) B_1 [s - i k x_1, 1]_1(2, k) \}, \quad (4.7a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i s B_1 [s; j]_1(\ell, k_1) = & (\Delta_j + k_1) B_1 [s; j]_1(\ell, k_1) + \\
 & + \sqrt{2} \int d^3 k \, M_j^*(k; X_j^0) \{ M_1(k; X_1^0) B_0 [s - i k x_1]_2(1, k, \ell, k_1) + \\
 & + M_2(k; X_2^0) B_0 [s - i k x_2]_2(2, k, \ell, k_1) \} + \\
 & + B_2 [s + i k_1 x_1; j, \ell]_0, \quad j, \ell = 1, 2, \quad (4.7b)
 \end{aligned}$$

wobei $B_2 [s; j, \ell] = 0$ wenn $j \neq \ell$,

und

$$\begin{aligned}
 i s B_0 [s]_2(j, k_1, \ell, k_2) &= (k_1 + k_2) B_0 [s]_2(j, k_1, \ell, k_2) + \\
 &+ \frac{1}{i^2} B_1 [s + i k_1 v_j; j]_1(\ell, k_2) + \\
 &+ \frac{1}{i^2} B_1 [s + i k_2 v_\ell; \ell]_1(j, k_1), \\
 j, \ell &= 1, 2.
 \end{aligned} \quad (4.7c)$$

Hier sind $B_\ell [s; j_1, \dots, j_\ell]_\omega(j'_1, k'_1, \dots, j'_\ell, k'_\ell)$ die Laplace-Transformierten von $B_\ell [t; j_1, \dots, j_\ell]_\omega(j'_1, k'_1, \dots, j'_\ell, k'_\ell)$.

Aus dem Gleichungssystem (4.7) kann man die Zwei-Photonen-Amplitude ausrechnen

$$\begin{aligned}
 B_0 [s]_2(j, k_1, \ell, k_2) &= \frac{-i}{i^2} \frac{1}{s + i(k_1 + k_2)} \left\{ B_1 [s + i k_1 v_j; j]_1(\ell, k_2) + \right. \\
 &\quad \left. B_1 [s + i k_2 v_\ell; \ell]_1(j, k_1) \right\}, \\
 j, \ell &= 1, 2
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

und in (4.7b) einsetzen. Mit den Abkürzungen (3.5), (3.6) und (3.8) aus dem §3 und nach der Multiplikation mit $A_j^{\text{tr}}(s + i k_1)$ können wir dann schreiben:

$$\begin{aligned}
 &B_1 [s; j]_1(\ell, k_1) + A_j^{\text{tr}}(s + i k_1) \frac{\Gamma_{jj+1}^{\text{tr}}(s + i k_1; v_j - v_{j+1})}{i} B_1 [s; j+1]_1(\ell, k_1) + \\
 &+ A_j^{\text{tr}}(s + i k_1) \int d^3 k \frac{M_j^{\text{tr}}(k; X_j^{\text{tr}}) M_j(k; X_j^{\text{tr}})}{s + i(k + k_1 - k v_j)} B_1 [s - i(k v_j - k_1 v_\ell); \ell]_1(j, k) + \\
 &+ A_j^{\text{tr}}(s + i k_1) \int d^3 k \frac{M_j^{\text{tr}}(k; X_j^{\text{tr}}) M_{j+1}(k; X_{j+1}^{\text{tr}})}{s + i(k + k_1 - k v_j)} B_1 [s - i(k v_j - k_1 v_\ell); \ell]_1(j+1, k) = \\
 &= -i A_j^{\text{tr}}(s + i k_1) B_2 [s + i k_1 v_\ell; j, \ell]_0, \\
 j, \ell &= 1, 2, \quad j+1 \pmod{2}.
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Bevor wir mit der Lösung von (4.9) beginnen, wollen wir die "Integralterme"

$$\begin{aligned}
 I_{jj\ell}(s, k_1) &:= \\
 &= \int d^3 k \frac{M_j^{\text{tr}}(k; X_j^{\text{tr}}) M_j(k; X_j^{\text{tr}})}{s + i(k + k_1 - k v_j)} B_1 [s - i(k v_j - k_1 v_\ell); \ell]_1(j, k), \\
 j, \ell &= 1, 2
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

untersuchen. Bei ruhenden Atomen kann man [9, 10] durch Ausdehnung der

Exponentialnäherung, wie sie im Absatz 3.2 für $A_j^{(s)}$ durchgeführt wurde, auf die Ausdrücke $I_{jj'}^{(s)}$ zeigen, daß die Integralterme verschwinden. Im nächsten Absatz wollen wir beweisen, daß auch bei bewegten Atomen die Integralterme vernachlässigt werden können.

4.3 Vernachlässigung der Integralterme

Wir wollen nun eine Abschätzung der Integralterme (4.10) vornehmen und zeigen, daß sie in der Exponentialnäherung verschwinden.

Für (4.10) gilt

$$|I_{jj'}^{(s)}(s, \mathbf{b}_s)| \leq \int d^3k \left| \frac{M_j^{(s)}(\mathbf{b}_s, \mathbf{k}_s^0) M_{j'}^{(s)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_s^0)}{s + i(k + k_s - k_{s1})} \right| |B_s[s - i(\mathbf{k}_s \mathbf{v}_s - \mathbf{k}_s \mathbf{v}_s)_1, \ell] j_1(j', \mathbf{k})|$$

Nach (2.22) ist aber

$$M_j^{(s)}(\mathbf{b}_s, \mathbf{k}_s^0) = M_j^{(s)}(\mathbf{b}_s, 0) e^{i\mathbf{k}_s^0 \mathbf{b}_s} =: M_j^{(s)}(\mathbf{b}_s) e^{i\mathbf{k}_s^0 \mathbf{b}_s} \quad (4.11a)$$

und deshalb

$$|M_j^{(s)}(\mathbf{b}_s, \mathbf{k}_s^0) M_{j'}^{(s)}(\mathbf{b}_s, \mathbf{k}_s^0)| = |M_j^{(s)}(\mathbf{b}_s) M_{j'}^{(s)}(\mathbf{b}_s)| e^{i\mathbf{b}_s(\mathbf{k}_s^0 - \mathbf{k}_s^0)} \leq |M_j^{(s)}(\mathbf{b}_s) M_{j'}^{(s)}(\mathbf{b}_s)| \quad (4.11b)$$

Um die Abschätzung der Integralterme fortsetzen zu können, machen wir für die Amplitude $B_s[s; \ell]_1(j', \mathbf{b})$ eine Annahme, die durch die Struktur der Gleichung (4.9) gerechtfertigt scheint und deren Selbstkonsistenz wir später prüfen werden:

$$B_s[s; \ell]_1(j', \mathbf{b}) = A_s^{(s)}(s + i\mathbf{k}_s) \cdot C_s[s; \ell]_1(j', \mathbf{b}), \quad j, \ell = 1, 2. \quad (4.12a)$$

Für die spontane Amplitude wollen wir die Exponentialnäherung des Absatzes 3.2 verwenden. Mit (3.6), (3.19) und (4.11) gilt dann

$$\begin{aligned} |I_{jj'}^{(s)}(s, \mathbf{b}_s)| &\leq \int d^3k \left| \frac{M_j^{(s)}(\mathbf{b}_s) M_{j'}^{(s)}(\mathbf{b}_s)}{s + i(k + k_s - k_{s1})} \right| \cdot \frac{1}{|s + \Gamma_s + i(\Delta_s + k - k_{s1} + k_{s2})|} \\ &\quad \cdot |\mathcal{F}(-i(\mathbf{k}_s \mathbf{v}_s - \mathbf{k}_s \mathbf{v}_s)_1) C_s[s; \ell]_1(j', \mathbf{b})| \leq \\ &\leq \int d^3k \left| \frac{M_j^{(s)}(\mathbf{b}_s) M_{j'}^{(s)}(\mathbf{b}_s)}{s + i(k + k_s - k_{s1})} \right| \cdot \frac{1}{|s + \Gamma_s + i(\Delta_s + k - k_{s1} + k_{s2})|} \\ &\quad \cdot ||| \mathcal{F}(-i(\mathbf{k}_s \mathbf{v}_s - \mathbf{k}_s \mathbf{v}_s)_1) ||| \cdot ||C_s[s; \ell]_1(j', \mathbf{b})|| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int d^3k \left| \frac{M_j^*(z) M_j(k)}{z + i(k+k_1 - \frac{1}{2}v_j)} \right| \frac{1}{|z + \Gamma_L + i(\Delta_L + k - \frac{1}{2}v_j + \frac{1}{2}v_L)|} \cdot \|C_1(z; \ell, j, k)\|,$$

Hier sind die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|$ durch (A.1) und (A.3) definiert. Gleichzeitig haben wir benutzt, daß nach (A.4) für jedes $z \in \mathbb{R}$ $\|\mathcal{G}(z)\| = 1$ ist.

Wir machen eine zweite Annahme, deren Selbstkonsistenz noch zu prüfen sein wird: die Maximumsnorm von $C_1(z; \ell, j, k)$ soll durch eine von k unabhängige Zahl abschätzbar sein

$$\|C_1(z; \ell, j, k)\| \leq C_1(\ell, j), \quad C_1(\ell, j) \in \mathbb{R}, \quad C_1(\ell, j) \geq 0. \quad (4.12b)$$

Dann kann man diese Konstante vor das Integral ziehen:

$$|I_{jj\ell}(z, k_1)| \leq C_1(\ell, j) \int d^3k \left| \frac{M_j^*(z) M_j(k)}{z + i(k+k_1 - \frac{1}{2}v_j)} \right| \frac{1}{|z + \Gamma_L + i(\Delta_L + k - \frac{1}{2}v_j + \frac{1}{2}v_L)|}$$

Wir wollen nun, wie in 3.2, die Identität (3.13) anwenden:

$$\frac{1}{z + A - B} = \frac{1}{z + A} + \frac{B}{(z + A)^2} + \frac{B^2}{(z + A)^3(z + A - B)}$$

Danach gilt:

$$\frac{1}{|z + i(k+k_1 - \frac{1}{2}v_j)|} \leq \frac{1}{|z + i(k+k_1)|} + \frac{|k v_j|}{|z + i(k+k_1)|^2} + \frac{|k v_j|^2}{|z + i(k+k_1)| |z + i(k+k_1 - \frac{1}{2}v_j)|}$$

und

$$\frac{1}{|z + \Gamma_L + i(\Delta_L + k + \frac{1}{2}v_L - \frac{1}{2}v_j)|} \leq \frac{1}{|z + \Gamma_L + i(\Delta_L + k + \frac{1}{2}v_L)|} + \frac{|k v_j|}{|z + \Gamma_L + i(\Delta_L + k + \frac{1}{2}v_L)|^2} + \frac{|k v_j|^2}{|z + \Gamma_L + i(\Delta_L + k + \frac{1}{2}v_L)|^2 |z + \Gamma_L + i(\Delta_L + k + \frac{1}{2}v_L - \frac{1}{2}v_j)|}$$

Da die Atomgeschwindigkeit v_j nichtrelativistisch ist, kann man alle Glieder mit $|v_j|^2$ oder höher vernachlässigen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} |I_{jj\ell}(z, k_1)| &\leq C_1(\ell, j) \int_0^{\infty} dk \frac{\bar{m}_{jj\ell}(k)}{|z + i(k+k_1)|} \frac{1}{|z + \Gamma_L + i(\Delta_L + k + \frac{1}{2}v_L)|} + \\ &+ C_1(\ell, j) \int_0^{\infty} dk \frac{\bar{m}_{jj\ell}(k; v_j)}{|z + i(k+k_1)|^2} \frac{1}{|z + \Gamma_L + i(\Delta_L + k + \frac{1}{2}v_L)|} + \\ &+ C_1(\ell, j) \int_0^{\infty} dk \frac{\bar{m}_{jj\ell}(k; v_j)}{|z + i(k+k_1)|} \frac{1}{|z + \Gamma_L + i(\Delta_L + k + \frac{1}{2}v_L)|^2} \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{m}_{jj'}(k) := k^L \int d^L \Omega \left| M_j^*(k) M_{j'}(k) \right| \quad (4.13a)$$

und

$$\tilde{m}_{jj'}(k, x_j) := k^L \int d^L \Omega \left| M_j^*(k) M_{j'}(k) \right| |k x_j| \quad (4.13b)$$

ist.

Wir brauchen die Integralterme (4.10) aber nicht für alle s abschätzen. Wenn wir die Gleichung (4.9) mit $(s + \Gamma_{jj} + i(\Delta_j + k_1))$ multiplizieren, sehen wir leicht, daß für s mit $|s|$ groß die Integralterme gegenüber dem Glied $(s + \Gamma_{jj} + i(\Delta_j + k_1)) B_1[s, j]_1(\ell, k_1)$ vernachlässigt werden können. Wir brauchen die Integralterme also nur für solche s abzuschätzen, für welche $(s + \Gamma_{jj} + i(\Delta_j + k_1))$ minimal wird. Wie im §3 werden wir sehen, daß die Existenz der Lösungen von (4.9) für s mit $\text{Re } s \geq z$, z gegebene reelle positive Zahl, garantiert ist. Wir brauchen deshalb die Integralterme nur an der Stelle $s' = z - i(\Delta_j + k_1)$ betrachten:

$$I_{jj'\ell}(s', k_1) := \lim_{s \rightarrow z - i(\Delta_j + k_1)} I_{jj'\ell}(s, k_1). \quad (4.14)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |I_{jj'\ell}(s', k_1)| &\leq C_1(\ell, j') \int_0^\infty dk \frac{\tilde{m}_{jj'}(k)}{|k + i(k - \Delta_j)| \cdot |z + \Gamma_{j\ell} + i(\Delta_\ell - \Delta_j + k - k_1 + b_1 x_\ell)|} + \\ &+ C_2(\ell, j') \int_0^\infty dk \frac{\tilde{m}_{jj'}(k, x_j)}{|z + i(k - \Delta_j)|^2 \cdot |z + \Gamma_{j\ell} + i(\Delta_\ell - \Delta_j + k - k_1 + b_1 x_\ell)|} + \\ &+ C_3(\ell, j') \int_0^\infty dk \frac{\tilde{m}_{jj'}(k, x_j)}{|z + i(k - \Delta_j)| \cdot |z + \Gamma_{j\ell} + i(\Delta_\ell - \Delta_j + k - k_1 + b_1 x_\ell)|^2}. \end{aligned}$$

Nach [6,9] ist aber $\tilde{m}_{jj'}(k)$ bei Δ_j eine schwach veränderliche Funktion, ähnliches gilt auch für $\tilde{m}_{jj'}(k, x_j)$. Die Nenner in den Integralen sind aber bei Δ_j stark veränderliche Funktionen. Es ist also zulässig, der Idee der Exponentialnäherung folgend, die Funktionen $\tilde{m}_{jj'}(k)$ bzw. $\tilde{m}_{jj'}(k, x_j)$ durch ihren Wert an der Stelle Δ_j zu ersetzen, diese Konstante vor das Integral zu ziehen und gleichzeitig die untere Integralgrenze nach $-\infty$

auszudehnen. Die Ausdehnung der Integralgrenzen ist notwendig, um Divergenzen zu vermeiden. Diese Näherung bedeutet einen globalen Eingriff in die Theorie, ihre Zulässigkeit ist aber ausreichend getestet worden [10,23]. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 |I_{ij, \ell}(s'_1, b_1)| \leq & C_1(\ell, j') \overline{m}_{ij, i}(\Delta_j) \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{|z + i(k - \Delta_j)| \cdot |z + \Gamma_{\ell} + i(k - k_1 + \Delta_{\ell} - \Delta_j + b_1, \underline{v}_{\ell})|} + \\
 & + C_1(\ell, j') \overline{m}_{ij, i}(\Delta_j, \underline{v}_{ij}') \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{|z + i(k - \Delta_j)|^2 \cdot |z + \Gamma_{\ell} + i(k - k_1 + \Delta_{\ell} - \Delta_j + b_1, \underline{v}_{\ell})|} + \\
 & + C_1(\ell, j') \overline{m}_{ij, i}(\Delta_j, \underline{v}_{ij}') \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{|z + i(k - \Delta_j)| \cdot |z + \Gamma_{\ell} + i(k - k_1 + \Delta_{\ell} - \Delta_j + b_1, \underline{v}_{\ell})|^2}.
 \end{aligned}$$

Die Nenner der Integrale sind in der Variablen k Polynome 2. bzw. 3. Grades und haben Pole nur in der oberen Halbebene. Nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie [24] verschwinden aber solche Integrale.

Wir sehen also, daß, falls die Annahmen (4.12) selbstkonsistent erfüllt sind, die Integralterme (4.10) verschwinden.

Die Prozesse, die mit den Integraltermen verbunden sind, wurden für ruhende Atome untersucht [10]. Diese Untersuchung lässt sich ohne Schwierigkeiten auch auf bewegte Atome ausdehnen. Sie zeigt, daß die Integralterme gerade solche Prozesse beschreiben, in denen das Photon von einem Atom emittiert und von gleichem Atom reabsorbiert wird. Das solche Prozesse, zumindest in der Exponentialnäherung, vernachlässigt werden können, ist auch physikalisch verständlich.

4.4 Ein-Photon-Amplituden

Mit den Annahmen (4.12) des Absatzes 4.3 wollen wir die Integralterme in (4.9) vernachlässigen. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & A_1^w(\lambda + i k_n) \Gamma_{12}(\lambda + i k_n; \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1) \\ A_2^w(\lambda + i k_n) \Gamma_{21}(\lambda + i k_n; \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1[\lambda; 1](\ell, k_1) \\ B_2[\lambda; 2](\ell, k_1) \end{pmatrix} = \\ = (-i) \begin{pmatrix} A_1^w(\lambda + i k_n) B_1[\lambda + i k; \mathcal{V}_1; 1, \ell]_0 \\ A_2^w(\lambda + i k_n) B_2[\lambda + i k; \mathcal{V}_1; 2, \ell]_0 \end{pmatrix}, \quad \ell = 1, 2. \quad (4.15)$$

Wesentlich ist, daß $B_\ell[\lambda; j](\ell, k_1)$ nur noch über j , nicht aber über ℓ gekoppelt sind. Das Gleichungssystem (4.15) ist uns bereits aus dem §3 bekannt. Nach dem Anhang B können wir die Matrix in (4.15) für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$, z eine feste reelle positive ausreichend große Zahl, invertieren (Siehe dazu die Fußnote 2) auf der Seite 16). Dann ist

$$B_\ell[\lambda; j](\ell, k_1) = \sum_{j'=1}^2 D_{jj'}(1, 2)_2(\lambda + i k_n) A_{j'}^w(\lambda + i k_n) (-i) B_2[\lambda + i k; \mathcal{V}_1; j', \ell]_0, \quad j, \ell = 1, 2, \quad (4.16)$$

mit

$$D_{jj'}(1, 2)_2(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [A_j^w(\lambda) (-\Gamma_{jj'+1}(\lambda; \mathcal{V}_j - \mathcal{V}_{j'+1})) A_{j'+1}^w(s) (-\Gamma_{j'+j}(\lambda; \mathcal{V}_{j'+1} - \mathcal{V}_j))]^{\nu}, \quad j=1, 2, \quad j+1 \pmod{2} \quad (4.17a)$$

und

$$D_{jj'+1}(1, 2)_2(\lambda) = D_{jj}(1, 2)_2(\lambda) A_{j'}^w(s) (-\Gamma_{jj'+1}(\lambda; \mathcal{V}_j - \mathcal{V}_{j'+1})), \quad j=1, 2, \quad j+1 \pmod{2}. \quad (4.17b)$$

Die Diskussion der Lösung wollen wir erst im Absatz 4.7 vornehmen; an dieser Stelle prüfen wir die Selbstkonsistenz der Annahmen (4.12), die zu der Vernachlässigung der Integralterme geführt haben. Nach (4.16) und (4.17) gilt

$$\begin{aligned} B_\ell[\lambda; j](\ell, k_1) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} [A_j^w(\lambda + i k_n) (-\Gamma_{jj'+1}(\lambda + i k_n; \mathcal{V}_j - \mathcal{V}_{j'+1})) A_{j'+1}^w(\lambda + i k_n) (-\Gamma_{j'+j}(\lambda + i k_n; \mathcal{V}_{j'+1} - \mathcal{V}_j))]^{\nu} \\ &\quad \cdot A_j^w(\lambda + i k_n) \{ -i B_2[\lambda + i k; \mathcal{V}_1; j, \ell]_0 + (-\Gamma_{jj'+1}(\lambda + i k_n; \mathcal{V}_j - \mathcal{V}_{j'+1})) A_{j'+1}^w(\lambda + i k_n) (-i) B_2[\lambda + i k; \mathcal{V}_1; j+1, \ell]_0 \} = \\ &= A_j^w(\lambda + i k_n) \sum_{\nu=0}^{\infty} [(-\Gamma_{jj'+1}(\lambda + i k_n; \mathcal{V}_j - \mathcal{V}_{j'+1})) A_{j'+1}^w(\lambda + i k_n) (-\Gamma_{j'+j}(\lambda + i k_n; \mathcal{V}_{j'+1} - \mathcal{V}_j)) A_j^w(\lambda + i k_n)]^{\nu} \\ &\quad \cdot \{ -i B_2[\lambda + i k; \mathcal{V}_1; j, \ell]_0 + (-\Gamma_{jj'+1}(\lambda + i k_n; \mathcal{V}_j - \mathcal{V}_{j'+1})) A_{j'+1}^w(\lambda + i k_n) (-i) B_2[\lambda + i k; \mathcal{V}_1; j+1, \ell]_0 \} = \\ &= A_j^w(\lambda + i k_n) C_\ell[\lambda; j](\ell, k_1), \quad j, \ell = 1, 2, \quad j+1 \pmod{2}. \quad (4.18) \end{aligned}$$

Wir müssen jetzt die Maximumsnorm von $C_4[\varepsilon_{ij}]_j(\ell, \varepsilon_1)$ abschätzen. Dabei haben wir zu beachten, daß die Lösungen von (4.15) nur für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$, z gegebene reelle positive Zahl, definiert sind. Nach den Definitionen des Anhangs A gilt dann mit (3.5), (3.6), (3.19) und (A.4)

$$\|A_j^{(p)}(s+ik_1)\| = \left\| \frac{1}{s + \Gamma_{jj}^{(p)} + i(\Delta_j + k_1)} \right\| = \max_{\operatorname{Re} s \geq z} \frac{1}{|s + \Gamma_{jj}^{(p)} + i(\Delta_j + k_1)|} \leq \frac{1}{z}, \quad (4.19a)$$

$$\|\Gamma_{jj+1}^{(p)}(s+ik_1, \underline{v}_j - \underline{v}_{j+1})\| \leq \int d^3k \left\| \frac{M_j^{(p)}(k; \underline{v}_j^0) M_{j+1}^{(p)}(k; \underline{v}_{j+1}^0)}{s + i(k + k_1 - k \underline{v}_j^0)} \right\| \|\mathcal{V}(ik)(\underline{v}_j - \underline{v}_{j+1})\| \leq \frac{\bar{M}_{jj+1}^{(p)}}{z}, \quad (4.19b)$$

wobei

$$\bar{M}_{jj'}^{(p)} := \int d^3k |M_j^{(p)}(k; \underline{v}_j^0) M_{j'}^{(p)}(k; \underline{v}_{j'}^0)|, \quad j, j' = 1, 2 \quad (4.20)$$

ist. Dann kann man mit (4.19) und (4.20) schreiben:

$$\begin{aligned} \|C_4[\varepsilon_{ij}]_j(\ell, \varepsilon_1)\| &\leq \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} [\|\Gamma_{jj+1}^{(\nu)}(s+ik_1, \underline{v}_j - \underline{v}_{j+1})\| \|A_{j+1}^{(\nu)}(s+ik_1)\| \|\Gamma_{jj+1}^{(\nu)}(s+ik_1, \underline{v}_{j+1} - \underline{v}_j)\| \|A_j^{(\nu)}(s+ik_1)\|]^\nu \cdot \\ &\cdot \{ \|\mathcal{V}(ik_1 \underline{v}_j^0)\| \|B_2[\varepsilon_{ij}, \ell]_0\| + \|\Gamma_{jj+1}^{(1)}(s+ik_1, \underline{v}_j - \underline{v}_{j+1})\| \|A_{j+1}^{(0)}(s+ik_1)\| \|\mathcal{V}(ik_1 \underline{v}_j^0)\| \|B_2[\varepsilon_{ij}, \ell]_0\| \} \leq \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{M}_{jj+1}^{(1)} \bar{M}_{j+1j}^{(1)}}{z^4} \right]^\nu \cdot \left\{ \|B_2[\varepsilon_{ij}, \ell]_0\| + \frac{\bar{M}_{jj+1}^{(1)}}{z^2} \|B_2[\varepsilon_{ij+1}, \ell]_0\| \right\} = \\ &=: C_4(j, \ell), \quad j, \ell = 1, 2, \quad j+1 (\text{mod } 2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Im Anhang B haben wir gezeigt, daß für genügend große z die unendliche Reihe konvergiert. $\bar{M}_{jj'}$ ist eine nichtnegative Zahl, die nicht von k_1 abhängig ist. Die Maximumsnorm von $B_2[\varepsilon_{ij}, \ell]_0$ ist ebenfalls eine nichtnegative reelle, von k_1 unabhängige Zahl. $c_1(j, \ell)$ ist also eine reelle, nichtnegative Zahl, die von k_1 unabhängig ist. Die Annahmen (4.12a) und (4.12b) sind somit durch (4.18) und (4.21) erfüllt, die Integralterme (4.10) verschwinden selbstkonsistent.

4.5 Die Null-Photonen-Amplitude

Wir können nun (4.16) in (4.7a) einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned}
 1 = & (s + i(\Delta_1 + \Delta_2)) B_z [z; 1, 2]_0 + \\
 & + \int d^3k \frac{\bar{L}_1^*(k; k_1^0) L_1(k; k_1^0) D_{z_1}(1, 2)_z (s + ik - iB_{z_1}) A_1^w(s + ik - iB_{z_1})}{s + \Gamma_{z_1} + i(k + \Delta_1 - B_{z_1})} B_z [z; 1, 2]_0 + \\
 & + \int d^3k \frac{\bar{L}_1^*(k; k_1^0) L_2(k; k_2^0) D_{z_2}(1, 2)_z (s + ik - iB_{z_2}) A_2^w(s + ik - iB_{z_2})}{s + \Gamma_{z_2} + i(k + \Delta_2 - B_{z_2})} B_z [z; 1, 2]_0 + \\
 & + \int d^3k \frac{\bar{L}_2^*(k; k_2^0) L_1(k; k_1^0) D_{z_1}(1, 2)_z (s + ik - iB_{z_1}) A_1^w(s + ik - iB_{z_1})}{s + \Gamma_{z_1} + i(k + \Delta_1 - B_{z_1})} B_z [z; 1, 2]_0 + \\
 & + \int d^3k \frac{\bar{L}_2^*(k; k_2^0) L_2(k; k_2^0) D_{z_2}(1, 2)_z (s + ik - iB_{z_2}) A_2^w(s + ik - iB_{z_2})}{s + \Gamma_{z_2} + i(k + \Delta_2 - B_{z_2})} B_z [z; 1, 2]_0 .
 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Mit Abschätzungen, die ähnlich den der Integralterme sind, kann man zeigen, daß alle Integrale in (4.22), deren Nenner ein Polynom 2. oder höheren Grades in k ist, verschwinden. Wir erhalten dann

$$1 = [s + i(\Delta_1 + \Delta_2) + \int d^3k \frac{\bar{L}_1^*(k; k_1^0) L_1(k; k_1^0)}{s + \Gamma_{z_1} + i(k + \Delta_1 - B_{z_1})} + \int d^3k \frac{\bar{L}_2^*(k; k_2^0) L_2(k; k_2^0)}{s + \Gamma_{z_2} + i(k + \Delta_2 - B_{z_2})}] B_z [z; 1, 2]_0 . \quad (4.23)$$

Die Exponentialnäherung des Absatzes 3.2 wenden wir auch hier an; für nichtrelativistische Atomgeschwindigkeiten gilt

$$B_z [z; 1, 2]_0 = \frac{1}{s + \Gamma_{z_1} + \Gamma_{z_2} + i(\Delta_1 + \Delta_2)} . \quad (4.24)$$

Diese Lösung stimmt mit der Amplitude des Zustandes "beide Atome angeregt, kein Photon" bei ruhenden Atomen [9,10]. Auf die physikalische Bedeutung von (4.24) gehen wir im Abschnitt 4.7 ein.

4.6 Zwei-Photonen-Amplituden

Aus (4.7c) kann man auch die Zwei-Photonen-Amplituden ausrechnen. Es gilt mit (4.16), (4.17) und (4.24):

$$\begin{aligned}
 B_0[s]_2(j, k_1, \ell, k_2) &= \frac{-i}{12} \frac{1}{s + i(\Delta_1 + \Delta_2)} \cdot \\
 &\cdot \left\{ \sum_{j=1}^2 (D_{j,1}(1,2))_2(s + i(k_1 + i(k_2, \mathcal{V}_j))) \frac{1}{s + \Gamma_{j,1} + i(\Delta_1 + k_1 + k_2 + \mathcal{V}_j)} \right. \\
 &\quad \cdot (-i) \frac{\tilde{\sigma}_{j'(\ell+1)}}{s + \Gamma_{j,1} + \Gamma_{j,2} + i(\Delta_1 + \Delta_2 + k_1 + \mathcal{V}_j + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_\ell)} \Bigg\} + \\
 &+ \sum_{\ell=1}^2 (D_{\ell,1}(1,2))_2(s + i(k_1 + i(k_2, \mathcal{V}_\ell))) \frac{1}{s + \Gamma_{\ell,1} + i(\Delta_1 + k_1 + k_2 + \mathcal{V}_\ell)} \cdot \\
 &\quad \cdot (-i) \frac{\tilde{\sigma}_{\ell'(\ell+1)}}{s + \Gamma_{j,1} + \Gamma_{\ell,1} + i(\Delta_1 + \Delta_2 + k_1 + \mathcal{V}_j + k_2 + \mathcal{V}_\ell)} \Bigg\}, \\
 &d, \ell = 1, 2, \quad j+1 \pmod{2}, \quad \ell+1 \pmod{2}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Die Kronecker- $\tilde{\sigma}$ -Symbole sorgen für die Erfüllung der Bedingung $B_2[\mathcal{L}_{i,j,\ell}]_{\mathcal{L}} = 0$ für $j \neq \ell$.

Wir haben somit die Lösungen der Bewegungsgleichung (4.7) gefunden und wollen sie in nächstem Absatz diskutieren.

4.7 Interpretation der Lösung

Die Laplace-Rücktransformierten der Lösungen der Gleichung (4.7) sind eindeutige Lösungen des Gleichungssystems (4.5) zu der Anfangsbedingung (4.6). Mit (4.4) bestimmen aber die Lösungen von (4.5) eindeutig die Lösung der Bewegungsgleichung (4.2) zu der Anfangsbedingung (4.3). Die Kenntnis der Lösungen von (4.7) ermöglicht uns also die Diskussion der Lösung der Bewegungsgleichung (4.2) des betrachteten Systems.

a) Die Null-Photonen-Amplitude

Die Null-Photonen-Amplitude ist in der Exponentialnäherung nach (4.4) und (4.24) mit der Null-Photonen-Amplitude von zwei angeregten ruhenden Atomen identisch [9,10]. Die Laplace-Rücktransformierte ist bekanntlich:

$$\alpha [t; b_1, b_2]_0 = e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} e^{-i(\delta_1 + \delta_2)t} \quad (4.26)$$

Die Wahrscheinlichkeit, beide Atome zur Zeit t noch angeregt zu finden, ist dann

$$|\alpha [t; b_1, b_2]|^2 = e^{-2(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} = e^{-2\Gamma_1 t} \cdot e^{-2\Gamma_2 t} \quad (4.27)$$

also genau das Produkt der Wahrscheinlichkeiten, jedes der beiden Atome noch angeregt vorzufinden. Dieses Ergebnis ist bereits nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung plausibel. Die Bewegung der Atome hat - in nichtrelativistischer Näherung - keinen Einfluß auf den Zerfall des Zustandes "beide Atome angeregt, kein Photon vorhanden".

b) Die Ein-Photon-Amplituden

Nach (4.4), (4.16), (4.17) und (4.24) ist

$$\begin{aligned} A [s; b_j, a_{j+1}]_1(s_1) = & \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{s + \Gamma_{jj}^{(1)} + i(\delta_j + \zeta_1)} (-\Gamma_{jj+1}^{(1)} (s + i\delta_j + \Gamma_{jj}^{(1)} - \Gamma_{jj+1}^{(1)})) \frac{1}{s + \Gamma_{j+1,j+1}^{(1)} + i(\delta_{j+1} + \zeta_1)} (-\Gamma_{j+1,j}^{(1)} (s + i\delta_{j+1} + \Gamma_{j+1,j}^{(1)} - \Gamma_{jj+1}^{(1)})) \right]^{\nu} \\ & \cdot \frac{1}{s + \Gamma_{jj}^{(1)} + i(\delta_j + \zeta_1)} \left\{ \frac{(-i) \Gamma_{jj+1}^{(1)}(s_1, s_{j+1}^{(1)})}{s + \Gamma_{jj}^{(1)} + \Gamma_{jj}^{(1)} + i(\delta_j + \delta_{j+1} + \zeta_1 + \zeta_2, s_{j+1}^{(1)})} + \right. \\ & \left. + (-\Gamma_{jj+1}^{(1)} (s + i\delta_j + \Gamma_{jj}^{(1)} - \Gamma_{jj+1}^{(1)})) \cdot \frac{1}{s + \Gamma_{j+1,j+1}^{(1)} + i(\delta_{j+1} + \zeta_1)} \cdot \frac{(-i) \Gamma_{j+1,j}^{(1)}(s_1, s_{j+1}^{(1)})}{s + \Gamma_{jj}^{(1)} + \Gamma_{jj}^{(1)} + i(\delta_j + \delta_{j+1} + \zeta_1 + \zeta_2, s_{j+1}^{(1)})} \right\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$j = 1, 2, \quad j+1 \in \{2, \infty\},$$

wobei $A [s; b_j, a_{j+1}]_1(k_1)$ die Laplace-Transformierte der Amplitude $\alpha [t; b_j, a_{j+1}]_1(k_1)$ ist. Wir sind also zu den "winkelabhängigen" Amplituden zurückgekehrt, aber im s -Bild geblieben. Diese Amplitude (4.28) des Zustandes "Atom A_j angeregt, Atom A_{j+1} im Grundzustand, ein Photon vorhanden" wollen wir nun diskutieren. Zuerst betrachten wir den Term in (4.28), der dem $\nu=0$ Glied der unendlichen Summe entspricht:

$$\begin{aligned} \hat{A}^{\circ}[a_j, a_{j+1}, J_1(k_1)] = & \frac{1}{s + \Gamma_{j+1} + i(\Delta_j + k_1)} \cdot \left\{ \frac{(-i) \Gamma_{j+1}(k_1, \mathcal{Y}_{j+1}^{\circ})}{s + \Gamma_{j+1} + \Gamma_{j+2} + i(\Delta_j + \Delta_c + k_1, \mathcal{Y}_{j+1}^{\circ})} + \right. \\ & \left. + (-\Gamma_{j+1}(i + i k_1, \mathcal{Y}_j^{\circ} - \mathcal{Y}_{j+1}^{\circ})) \frac{1}{s + \Gamma_{j+1} + i(\Delta_j + k_1)} \cdot \frac{(-i) \Gamma_j(k_1, \mathcal{Y}_j^{\circ})}{s + \Gamma_{j+1} + \Gamma_{j+2} + i(\Delta_j + \Delta_c + k_1, \mathcal{Y}_{j+1}^{\circ})} \right\}, \\ & j=1, 2, \quad j+1 (\text{mod } 2). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die Laplace-Rücktransformierte dieses Ausdrucks ist mit (3.5) und (3.6)

$$\begin{aligned} \alpha^{\circ}[t, b_j, a_{j+1}, J_1(k_1)] = & e^{-\Gamma_{j+1} t} e^{-i(\Delta_j + k_1) t} \int_0^t dt' e^{-\Gamma_{j+1} t'} e^{-i(\Delta_{j+1} + k_1, \mathcal{Y}_{j+1}^{\circ} - k_1) t'} (-i) \Gamma_{j+1}(k_1, \mathcal{Y}_{j+1}^{\circ}) + \\ & + e^{-\Gamma_{j+1} t} e^{-i(\Delta_j + k_1) t} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' (-i) \Gamma_j(k_1, \mathcal{Y}_j^{\circ}) e^{-\Gamma_j t''} e^{-i(k_1 - \Delta_j - k_1, \mathcal{Y}_j^{\circ}) t''} \\ & \cdot \int_0^{t'} dt''' e^{-\Gamma_{j+1} t'''} e^{-i(\Delta_{j+1} + k_1, \mathcal{Y}_{j+1}^{\circ} - k_1) t'''} (-i) \Gamma_{j+1}(k_1, \mathcal{Y}_{j+1}^{\circ}) \cdot \\ & \cdot \int_0^{t'''} dt'''' e^{-\Gamma_j t''''} e^{-i(\Delta_j + k_1, \mathcal{Y}_j^{\circ} - k_1) t''''} (-i) \Gamma_j(k_1, \mathcal{Y}_j^{\circ}), \\ & j=1, 2, \quad j+1 (\text{mod } 2). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Aus den Untersuchungen eines bewegten Atoms im Abschnitt 3.3 sind uns die einzelnen in (4.30) enthaltenen Ausdrücke bekannt. Das erste Glied in (4.30) beschreibt das vom Atom A_{j+1} spontan abgestrahlte Wellenpaket gefaltet mit der exponential abfallenden Amplitude des Zustands "Atom A_j angeregt". Das zweite Glied in (4.30) beschreibt einen etwas komplizierteren Prozeß: zuerst (d.h. in der Faltung ganz rechts) strahlt das Atom A_j ein Wellenpaket ab. Unter Anwesenheit dieses Wellenpakets wird vom Atom A_{j+1} ein weiteres Wellenpaket abgestrahlt, um vom Atom A_j absorbiert zu werden. Die hier vorkommenden zwei Elementarprozesse - der spontane Zerfall und die Resonanzfluoreszenz - weisen, wie in 3.3 ausführlich diskutiert, eine Doppler-Verschiebung der Emissions- und Absorptionsfrequenzen, sowie eine -Verbreiterung der Lorentz-Linien, die die von den Atomen abgestrahlten Wellenpakete im Fernfeld bilden.

Wir wollen nun zum ν -ten Glied in (4.28) übergehen. Es ist

$$A^{(\nu)}[s; b_j, a_{j+1}, j_1(\xi_1)] = \left[\frac{1}{s + \Gamma_{j+1}^{(j)} + i(\Delta_{j+1}^{(j)} + \xi_1)} \right] (-\Gamma_{j+1}^{(j)} + i(\Delta_{j+1}^{(j)} - \Delta_{j+1}^{(j)} + 1)) \cdot \frac{1}{s + \Gamma_{j+1}^{(j)} + i(\Delta_{j+1}^{(j)} + \xi_1)} (-\Gamma_{j+1}^{(j)} + i(\Delta_{j+1}^{(j)} - \Delta_{j+1}^{(j)} + 1)) \cdot A^{(0)}[s; b_j, a_{j+1}, j_1(\xi_1)] \quad (4.31)$$

$j = 1, 2, \dots, j+1 \text{ (max } 2)$.

Die eckige Klammer ist uns aber aus 3.4 bekannt. Sie beschreibt den aus der Folge von spontanen Zerfällen und Resonanzfluoreszenzen bestehenden "Weg des Photons" vom Atom A_j über A_{j+1} zu A_j zurück. Die ν -Potenz bedeutet, daß dieser geschlossene Weg ν -fach durchlaufen wird.

So können wir die Bedeutung der Amplitude (4.28) zusammenfassen: Der Zustand "Atom A_j angeregt, Atom A_{j+1} im Grundzustand, ein Photon vorhanden" entsteht aus dem Anfangszustand "beide Atome angeregt, kein Photon vorhanden" durch folgende Prozesse:

- (i) Atom A_{j+1} zerfällt spontan und strahlt ein Wellenpaket ab. Die Wahrscheinlichkeit, Atom A_j noch im angeregten Zustand vorzufinden, nimmt dann exponential ab.
- (ii) Zuerst zerfällt das Atom A_j spontan und strahlt ein Wellenpaket ab. Das danach vom Atom A_{j+1} spontan abgestrahlte Wellenpaket wird von dem sich nun im Grundzustand befindlichen Atom A_j durch Resonanzfluoreszenz absorbiert.
- (iii) Nach dem Abschluß des Prozesses (i) oder (ii) zerfällt das Atom A_j spontan und strahlt ein Wellenpaket ab. Dieses Wellenpaket wird durch Resonanzfluoreszenz vom Atom A_{j+1} absorbiert und spontan re-emittiert, um vom Atom A_j erneut durch Resonanzfluoreszenz absorbiert zu werden. Dieser Prozeß kann beliebig oft wiederholt werden.

Die Ein-Photon-Amplituden werden also aus den unabhängigen Prozessen der spontanen Emission und der Resonanzfluoreszenz nach den Gesetzen der Kombinatorik und der Kausalität zusammengesetzt. Die Bewegung der Atome macht sich lediglich in den "richtigen" Doppler-Effekten bemerkbar.

c) Die Zwei-Photonen-Amplitude

Für die Zwei-Photonen-Amplitude gilt nach (4.4) und (4.25)

$$\begin{aligned} \underline{A} [s; a_1, a_2]_2(k_1, k_2) = & \frac{1}{i2} \frac{1}{s+i(k_1+k_2)} \sum_{j=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 \left\{ \sum_{j \neq \ell}^2 (D_{j\ell} (1,2)_\ell (s+i k_\ell + i k_1, \underline{v}_j) \right. \\ & \cdot \frac{\tilde{\mathcal{D}}_\ell^{(j+1)}}{s+\Gamma_{j\ell}+i(\Delta_j+k_2+k_1, \underline{v}_j)} \Big) + \\ & \left. + \sum_{\ell \neq j}^2 (D_{\ell\ell} (1,2)_\ell (s+i k_1 + i k_2, \underline{v}_\ell) \frac{\tilde{\mathcal{D}}_\ell^{(j+1)}}{s+\Gamma_{\ell\ell}+i(\Delta_{\ell 1}+k_1+k_2, \underline{v}_\ell)} \right\} \cdot \quad (4.32) \\ & \cdot \frac{(-i) \underline{L}_j(k_1, \underline{v}_j^0) \otimes (-i) \underline{L}_\ell(k_2, \underline{v}_\ell^0)}{s+\Gamma_{j1}+\Gamma_{\ell 2}+i(\Delta_1+\Delta_2+k_1, \underline{v}_j+k_2, \underline{v}_\ell)} \cdot \\ & \cdot \delta^{j+1}(\text{mod } 2), \ell^{j+1}(\text{mod } 2). \end{aligned}$$

Um diese Amplitude diskutieren zu können, müssen wir sie wieder in den t-Raum rücktransformieren. Wir wollen zuerst die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \underline{A}_{jj}^0 [s; a_1, a_2]_2(k_1, k_2) = & \frac{1}{i2} \frac{1}{s+i(k_1+k_2)} \frac{1}{s+\Gamma_{jj}+i(\Delta_j+k_2+k_1, \underline{v}_j)} \cdot (-\Gamma_{jj}^{(j+1)} (s+i k_2 + i k_1, \underline{v}_j - \underline{v}_{j+1})) \cdot \\ & \cdot \frac{1}{s+\Gamma_{jj}^{(j+1)}+i(\Delta_j+k_2+k_1, \underline{v}_j)} \cdot \frac{(-i) \underline{L}_j(k_1, \underline{v}_j^0) \otimes (-i) \underline{L}_j(k_2, \underline{v}_j^0)}{s+\Gamma_{j1}+\Gamma_{j2}+i(\Delta_1+\Delta_2+k_1, \underline{v}_j+k_2, \underline{v}_j)} \cdot \quad (4.33a) \\ & \cdot \delta^{j+1}(\text{mod } 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{jj}^0 [s; a_1, a_2]_2(k_1, k_2) = & \frac{1}{i2} \frac{1}{s+i(k_1+k_2)} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{s+\Gamma_{jj}^{(j+1)}+i(\Delta_j+k_2+k_1, \underline{v}_j)} \cdot \frac{(-i) \underline{L}_j(k_1, \underline{v}_j^0) \otimes (-i) \underline{L}_{j+1}(k_2, \underline{v}_{j+1}^0)}{s+\Gamma_{j1}+\Gamma_{j2}+i(\Delta_1+\Delta_2+k_1, \underline{v}_j+k_2, \underline{v}_{j+1})} \cdot \quad (4.33b) \\ & \cdot \delta^{j+1}(\text{mod } 2), \end{aligned}$$

untersuchen. Wenn wir in der unendlichen Summe in $D_{j\ell} (1,2)_\ell (s)$ nur das nullte Glied nehmen, ist

$$\begin{aligned} \underline{A}_{jj}^0 [s; a_1, a_2]_2(k_1, k_2) = & \sum_{j=1}^2 (\underline{A}_{jj}^0 [s; a_1, a_2]_2(k_1, k_2) + \underline{A}_{jj}^0 [s; a_1, a_2]_2(k_2, k_1) + \\ & + \underline{A}_{jj+1}^0 [s; a_1, a_2]_2(k_1, k_2) + \underline{A}_{jj+1}^0 [s; a_1, a_2]_2(k_2, k_1)), \quad (4.34) \\ & \cdot \delta^{j+1}(\text{mod } 2). \end{aligned}$$

(4.33) lässt sich rücktransformieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{j,j+1}^{\circ} [a_1, a_2]_2(k_1, k_2) &= \frac{A}{i^2} e^{i(k_1+k_2)t} \int_0^t dt' e^{-i\Omega_j t'} e^{-i(\Omega_j - k_1 + k_2 \nu_j) t'} \cdot \\ &\cdot \int_0^{t'} dt'' e^{-i\Omega_j t''} M_j^{\circ}(k, \nu_j^{\circ}) M_{j+1}(\underline{k}, \nu_{j+1}^{\circ}) e^{-i\Omega_j t''} e^{i(\Omega_j - k + k_2 \nu_j) t''} \cdot \\ &\cdot \int_0^{t''} dt''' e^{-i\Omega_{j+1} t'''} e^{-i(\Omega_{j+1} - k + k_2 \nu_{j+1}) t'''} \cdot \\ &\cdot \int_0^{t'''} dt'''' e^{-i\Omega_j t''''} e^{-i(\Omega_j - k_1 + k_2 \nu_j) t''''} (-i) M_j(\underline{k}_1, \nu_j^{\circ}) \otimes (-i) M_j(\underline{k}_2, \nu_j^{\circ}), \\ &j = 1, 2, \quad j+1 \pmod{2}, \end{aligned} \quad (4.35a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{j,j+1}^{\circ} [a_1, a_2]_2(k_1, k_2) &= \frac{A}{i^2} e^{-i(k_1+k_2)t} \int_0^t dt' e^{-i\Omega_j t'} e^{-i(\Omega_j - k_1 + k_2 \nu_j) t'} \cdot \\ &\cdot \int_0^{t'} dt'' e^{-i\Omega_{j+1} t''} e^{-i(\Omega_{j+1} - k_1 + k_2 \nu_{j+1}) t''} (-i) M_j(\underline{k}_1, \nu_j^{\circ}) \otimes (-i) M_{j+1}(\underline{k}_2, \nu_{j+1}^{\circ}), \\ &j = 1, 2, \quad j+1 \pmod{2}. \end{aligned} \quad (4.35b)$$

Wir sehen, daß diese Amplituden Faltungen bekannter Prozesse sind.

(4.35a) beschreibt den Prozeß:

- (i) Atom A_j emittiert das Doppler-verschobene "Photon" $\underline{k}_2$ mit der "Winkelcharakteristik" $M_j(\underline{k}_2, \nu_j^{\circ})$. Atom A_{j+1} emittiert ein Photon, welches vom A_j absorbiert wird. Nun emittiert das Atom A_j das Doppler-verschobene "Photon" $\underline{k}_1$ mit der "Winkelcharakteristik" $M_j(\underline{k}_1, \nu_j^{\circ})$.

Die Amplitude (4.35b) beschreibt den Prozeß:

- (ii) Atom A_{j+1} emittiert ein Wellenpaket mit dem Wellenvektor $\underline{k}_2$, das Atom A_j emittiert ein Wellenpaket mit dem Wellenvektor $\underline{k}_1$. Beide Wellenpakete bilden im Fernfeld eine Doppler-verschobene und-verbreiterte Lorentz-Linie, ihre "Winkelcharakteristik" ist durch das Übergangselement des Atoms bestimmt, von welchem sie emittiert wurden.

Aus (4.32) sehen wir leicht, daß diese Amplitude aus den Prozessen (i) und

(ii) durch folgenden Prozeß entsteht:

- (iii) Den Prozessen (i) und (ii) werden beliebig viele geschlossene "Photonen-

schleifen" am Atom A_j oder A_{j+1} .

Die Amplitude (4.32) setzt sich also ebenfalls aus den bekannten Prozessen der spontanen Emission und der Resonanzfluoreszenz so zusammen, daß alle kombinatorischen Möglichkeiten der Abstrahlung von zwei Photonen durch zwei Atome enthalten sind. Die abgestrahlten Wellenpakete bilden im Fernfeld Doppler-verschobene und -verbreiterte Lorentz-Linien. "Richtige" Doppler-Verschiebungen der Übergangsfrequenzen sind ebenfalls bei jeder Emission und Absorption eines Photons zu verzeichnen.

So wie bei dem Beispiel von vielen Atomen und einem Photon sehen wir also auch bei zwei anfangs angeregten Atomen, daß die Bewegung der Atome nur die "richtigen" Doppler-Verschiebungen in der Emissions- und Absorptionsfrequenz und -Linienverbreiterungen zur Folge hat. Der den Gesetzen der Kombinatorik folgende Aufbau der Amplituden aus den Grundprozessen der spontanen Emission und der Resonanzfluoreszenz, der für die Wahrung der Kausalität der Weisskopf-Wigner-Theorie ausschlaggebend ist [8], wird durch die Bewegung der Atome nicht zerstört. Über die Doppler-Effekte führt aber die Atomenbewegung zur Abschwächung der Photonen austauscheffekte. Es ist deshalb anzunehmen, daß diese "Temperatureffekte" einen Einfluß auf die Schwellenbedingung für den Aufbau eines Laserstrahles haben, da der Laser nur als durch den Photonen austausch zustande gekommenes Kollektivphänomen zu verstehen ist [13,4,9]. Auch das Verhalten der Atome, wie ein Photonen-zähler im "besetzten" Zustand kein weiteres Photon "registrieren" zu können (d.h. im angeregten Zustand nicht zur Resonanzfluoreszenz fähig zu sein) [10], wird durch die Bewegung der Atome nicht zerstört.

Anhang A: Der Verschiebeoperator $\mathcal{Y}(ia)$

In diesem Anhang wollen wir die Eigenschaften des in (3.6) definierten Verschiebeoperators $\mathcal{Y}(ia)$ untersuchen.

Seien $f(s)$ komplexwertige Funktionen der komplexwertigen Variablen s . Für $\operatorname{Re} s \geq 0$ seien $f(s)$ analytisch und beschränkt. Man kann sich leicht überzeugen, daß solche Funktionen $f(s)$ einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ bilden, den wir mit $\mathcal{F}[\operatorname{Re} s \geq 0]$ bezeichnen. Auf diesem Vektorraum definieren wir

$$\|f\| := \max_{\operatorname{Re} s \geq 0} |f(s)|. \quad (\text{A.1})$$

Nach [25] ist dies aber genau die bekannte Maximumsnorm.

Den Verschiebeoperator $\mathcal{Y}(ia)$ führen wir ein als:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(ia) : \mathcal{F}[\operatorname{Re} s \geq 0] &\rightarrow \mathcal{F}[\operatorname{Re} s \geq 0], \\ \mathcal{Y}(ia)(f(s)) &:= f(s+ia), \quad a \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Wir sehen, daß für $f \in \mathcal{F}[\operatorname{Re} s \geq 0]$ auch $\mathcal{Y}(ia)f \in \mathcal{F}[\operatorname{Re} s \geq 0]$ gilt, da für $\operatorname{Re} s \geq 0$ auch $\operatorname{Re}(s+ia) \geq 0$ gilt und $\mathcal{Y}(ia)f$ analytisch und beschränkt ist.

Wir wollen nun die Norm des Operators $\mathcal{Y}(ia)$ berechnen. Nach [25] ist die Norm des Operators definiert als

$$\|\mathcal{Y}(ia)\| := \sup \{ \|\mathcal{Y}(ia)f\| \mid f \in \mathcal{F}[\operatorname{Re} s \geq 0], \|f\| \leq 1 \}. \quad (\text{A.3})$$

Nach (A.1) und (A.2) ist aber $\|\mathcal{Y}(ia)f\| = \|f\|$, so daß

$$\|\mathcal{Y}(ia)\| = 1 \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R} \quad (\text{A.4})$$

ist.

Wir haben nur noch die Frage zu beantworten, ob in unserer Theorie der Verschiebeoperator $\mathcal{Y}(ia)$ tatsächlich nur auf Funktionen angewendet wird, die für $\operatorname{Re} s \geq 0$ analytisch und beschränkt sind. Die Funktionen, auf die $\mathcal{Y}(ia)$ in unserer Theorie wirkt, sind aber die Amplituden $A_j(s)_0$ im §3 oder $B_1[\xi; j]_1(j', k)$ im §4. Man sieht leicht, daß diese Amplituden analytisch und beschränkt sind.

Anhang 8: Invertieren der Matrix $\alpha_{JJ}(s)$

Im Abschnitt 3.1 haben wir behauptet, die Matrix $\alpha_{JJ}(s)$, gegeben durch (3.9), lasse sich invertieren und das Inverse dieser Matrix wird durch die Elemente $D_{jj'}(1, \dots, J)_J(s)$, $j, j' = 1, \dots, J$ nach (3.11) gegeben. In diesem Anhang wollen wir den mathematischen Beweis dieser Behauptung liefern. Außerdem zeigen wir, daß die in (3.11) enthaltenen unendlichen Reihen konvergieren. Diese Aussage selber formulieren wir in einem Satz B.1; den Beweis führen wir mit Hilfe von drei Hilfssätzen B.2 - B.4.

Entsprechend den Bezeichnungen in (3.10) und (3.11) formulieren wir:

Satz B.1 : Sei $\alpha_{JJ}(s) = (a_{jj'}(s))_{j,j'=1, \dots, J}$ eine Matrix, definiert durch

$$a_{jj'}(s) = \begin{cases} 1 & \text{für } j=j' \\ A_j^*(s) \prod_{i=1}^{j-1} (\varepsilon_i \varepsilon_i^* - \varepsilon_i^* \varepsilon_i) & \text{für } j \neq j', j, j'=1, \dots, J. \end{cases} \quad (B.1)$$

Dann existiert ein $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$ so, daß für s mit $\text{Re } s \geq z$ das Inverse der Matrix $\alpha_{JJ}(s)$ existiert und die Matrix $\alpha_{JJ}^{-1}(s) = (D_{jj'}(1, \dots, J)_J(s))_{j,j'=1, \dots, J}$ ist, mit

$$D_{jj}(j)_J(s) = 1, \quad j = 1, \dots, J, \quad (B.2a)$$

$$\begin{aligned} D_{jj}(1, \dots, J)_J(s) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{j-1} P_{(j_i, \dots, j_n)} \{ A_j^*(s) (-\prod_{i=1}^{j-1} (\varepsilon_i \varepsilon_i^* - \varepsilon_i^* \varepsilon_i)) D_{j_i, j_i}(1, \dots, j)_J(s) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-1} (A_{j_m}^*(s) (-\prod_{i=j_m+1}^{j-1} (\varepsilon_i \varepsilon_i^* - \varepsilon_i^* \varepsilon_i)) D_{j_m, j_m}(1, \dots, j)_J(s) \cdot \\ &\quad \cdot A_{j_m}^*(s) (-\prod_{i=j_m+1}^{j-1} (\varepsilon_i \varepsilon_i^* - \varepsilon_i^* \varepsilon_i)) \} \Big], \end{aligned} \quad (B.2b)$$

$$j = 1, \dots, J, \quad J \in \mathbb{N}, \quad J \geq 2$$

und

$$\begin{aligned}
 D_{j,j'}(1, \dots, j)_j(z) &= \\
 &= D_{j,j'}(1, \dots, j)_j(z) \cdot [A_{j,j'}^{\psi}(z) (-\Gamma_{j,j'}^{\psi}(z; \sigma_j - \sigma_{j'})) D_{j,j'}(1, \dots, j)_j(z) + \\
 &+ \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \\ (j_1, \dots, j_n)}}^{j-2} \{A_{j,j'}^{\psi}(z) (-\Gamma_{j,j'}^{\psi}(z; \sigma_j - \sigma_{j'})\} D_{j,j'}(1, \dots, j)_j(z), \quad (B.2c) \\
 &\cdot \prod_{m=1}^{n-1} (A_{j,j_m}^{\psi}(z) (-\Gamma_{j,j_m}^{\psi}(z; \sigma_j - \sigma_{j_m})) D_{j,j_m}(1, \dots, j)_j(z))_{j-(m+1)}^{\psi}(z) \cdot \\
 &\cdot A_{j,j'}^{\psi}(z) (-\Gamma_{j,j'}^{\psi}(z; \sigma_j - \sigma_{j'})) D_{j,j'}(1, \dots, j)_j(z)_{j-(n+1)}^{\psi}(z) \}, \\
 &j \neq j', j, j' = 1, \dots, j, j \in \mathbb{N}, j \geq 2,
 \end{aligned}$$

wobei die unendliche Summe in (B.2b) konvergent ist.

Hierbei ist (B.1) mit (3.9) und (B.2) mit (3.11) identisch; wie in 3.1 ist $(1, \dots, j)_j(z) = \{1, \dots, j\} \setminus \bigcup_{j=1}^n \{j_j\}$ und $\prod_{(j_1, \dots, j_n)}^{(1, \dots, j)}$ ist die Summe über alle $\binom{j}{n}$ verschiedenen Variationen der n verschiedenen Indizes $j_1, \dots, j_n$ aus der Zahlenmenge $(1, \dots, j)$, $n \leq j$. Für $j=n$ geht diese Variationssumme in die bekannte Permutationssumme über.

Bevor wir den Satz B.1 beweisen, formulieren und beweisen wir drei Hilfssätze:

Lemma B.2: Sei

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 1 \end{pmatrix}$$

eine Matrix der Operatoren A, B, C. Falls die inversen Operatoren A^{-1} und $[1 - CA^{-1}B]^{-1}$ existieren, ist diese Matrix invertierbar und ihr Inverses lautet

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B[1 - CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B[1 - CA^{-1}B]^{-1} \\ -[1 - CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} & [1 - CA^{-1}B]^{-1} \end{pmatrix}. \quad (B.3)$$

Beweis von B.2: Wir zeigen direkt durch Multiplizieren der beiden Matrizen von links und rechts, daß (B.3) das Inverse der angegebenen Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} A', B' \\ C', D' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A, B \\ C, 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + A^{-1}B[1-CA'B]^{-1}C - A'B[1-CA'B]^{-1}C, A'B + A^{-1}B[1-CA'B]^{-1}CA'B - \\ - A^{-1}B[1-CA'B]^{-1} \\ - [1-CA'B]^{-1}C + [1-CA'B]^{-1}C, - [1-CA'B]^{-1}CA'B + [1-CA'B]^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A', B' \\ C', D' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + B[1-CA'B]^{-1}CA' - B[1-CA'B]^{-1}CA', -B[1-CA'B]^{-1} + B[1-CA'B]^{-1} \\ CA' + CA'B[1-CA'B]^{-1}CA' - [1-CA'B]^{-1}CA', -CA'B[1-CA'B]^{-1} + [1-CA'B]^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Lemma B.2 bewiesen.

Lemma B.3: Sei

$$D_{j,j}^1(1, \dots, j)_0(s) :=$$

$$= \sum_{n=1}^{j-1} \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \mathcal{P} \left\{ A_{j,j}^1(s) (-\Gamma_{j,j}^1(s; \vartheta_1, \dots, \vartheta_{j_1})) D_{j,j}^1(1, \dots, j)_{j-1}(s) \right. \quad (B.4)$$

$$\cdot \prod_{m=1}^{n-1} (A_{j_m}^1(s) (-\Gamma_{j_m, j_m}^1(s; \vartheta_1, \dots, \vartheta_{j_m})) D_{j_m, j_m}^1(1, \dots, j)_{j_m-1}(s)) \cdot$$

$$\cdot A_{j_n}^1(s) (-\Gamma_{j_n, j_n}^1(s; \vartheta_1, \dots, \vartheta_{j_n})) \left. \right\}, \quad j=1, \dots, j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \geq 1.$$

Dann existiert ein $z \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$ so, daß für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ für jedes $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$ $\|D_{j,j}^1(1, \dots, j)_0(s)\| \ll 1$ und $\|D_{j,j}^1(1, \dots, j)_0(s)\| \approx 1$ gilt. Dabei ist die Norm $\|\cdot\|$ nach (A.3) definiert.

Beweis von B.3: Wir führen den Beweis mit Hilfe der Induktion. Zuerst gelte

die Aussagen des Lemmas für $j=1$, da nach (B.2a) $\|D_{j,j}^1(j)_1(s)\| = 1$

und, da die Summe über n leer ist, nach (B.4) $D_{j,j}^1(j)_1(s) = 0$ gilt.

Wir wollen nun das Lemma für $J=2$ prüfen:

a) Nach (B.2b) und (B.4) kann man schreiben

$$D_{j,j}^1(j,j+1)_2(z) = A_j^w(z) (-\Gamma_{j,j+1}(z; y_j^0 - y_{j+1}^0)) A_{j+1}^w(z) (-\Gamma_{j+1,j}(z; y_{j+1}^0 - y_j^0)),$$

$$D_{j,j}^1(j,j+1)_2(z) = \sum_{r=0}^{\infty} [D_{j,j}^1(j,j+1)_2(z)]^r, \quad j=1,2, \quad j+1 \pmod{2}.$$

Mit (3.5) und (3.6) ist

$$\begin{aligned} \|D_{j,j}^1(j,j+1)_2(z)\| &\leq \|A_j^w(z)\| \int d^3k \left\| \frac{\bar{M}_j^w(k; X_j^0) \bar{M}_{j+1}(k; X_{j+1}^0)}{s + i(k - k_{j+1})} \right\| \cdot \|\mathcal{S}(-i(k; y_j^0 - y_{j+1}^0))\| \\ &\quad \cdot \|A_{j+1}^w(z)\| \cdot \int d^3k' \left\| \frac{\bar{M}_{j+1}(k'; X_{j+1}^0) \bar{M}_j(k'; X_j^0)}{s + i(k' - k_{j+1}^0)} \right\| \cdot \|\mathcal{S}(-i(k'; y_{j+1}^0 - y_j^0))\| \leq \\ &\leq \|A_j^w(z)\| \int d^3k \left\| \frac{\bar{M}_j^w(k; X_j^0) \bar{M}_{j+1}(k; X_{j+1}^0)}{s + i(k - k_{j+1})} \right\| \|A_{j+1}^w(z)\| \int d^3k' \left\| \frac{\bar{M}_{j+1}^w(k'; X_{j+1}^0) \bar{M}_j(k'; X_j^0)}{s + i(k' - k_{j+1}^0)} \right\|, \end{aligned}$$

da nach (A.4) die Norm des Operators $\mathcal{S}(ia)$ gleich 1 ist.

Die Norm $\|\cdot\|$ ist durch (A.1) auf dem Raum der für $\text{Re } s \geq 0$ analytischen beschränkten Funktionen $\mathcal{F}[\text{Re } s \geq 0]$ definiert. Wir sehen leicht, daß durch den Übergang zum Vektorraum $\mathcal{F}[\text{Re } s \geq z]$ für beliebiges reelles positives z die Definitionen im Anhang A nicht verändert werden, vor allem bleibt $\|\mathcal{S}(ia)\| = 1$ für jedes $a \in \mathbb{R}$. Wir wählen ein solches z . Dann gilt für die Maximumsnorm in $\mathcal{F}[\text{Re } s \geq z]$

$$\|A_j^w(z)\| = \max_{\text{Re } s \geq z} \left| \frac{1}{s + \Gamma_{j,j}^0 + i\Delta_j} \right| \leq \frac{1}{z}$$

und

$$\begin{aligned} \int d^3k \left\| \frac{\bar{M}_j^w(k; X_j^0) \bar{M}_{j+1}(k; X_{j+1}^0)}{s + i(k - k_{j+1})} \right\| &= \int d^3k \left| \frac{\bar{M}_j^w(k; X_j^0) \bar{M}_{j+1}(k; X_{j+1}^0)}{s + i(k - k_{j+1})} \right| \max_{\text{Re } s \geq z} \left| \frac{1}{s + i(k - k_{j+1})} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{z} \int d^3k \left| \bar{M}_j^w(k; X_j^0) \bar{M}_{j+1}(k; X_{j+1}^0) \right| =: \frac{1}{z} \bar{M}_{j,j+1}. \end{aligned}$$

$\bar{M}_{j,j+1}$ ist eine reelle positive Zahl. Für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ erhalten wir

$$\|D_{j,j+1}^1(j,j+1)_2(s)\| \leq \frac{\bar{M}_{j,j+1} \bar{M}_{j+1,j}}{2^4}, \quad j=1,2, j+1 \pmod{2}$$

Für genügend großes z ist für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ $\|D_{j,j+1}^1(j,j+1)_2(s)\| \ll 1$.

Dann konvergiert aber für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [D_{j,j+1}^1(j,j+1)_2(s)]^\nu = \frac{1}{1 - D_{j,j+1}^1(j,j+1)_2(s)} = D_{j,j+1}^1(j,j+1)_2(s), \quad j=1,2, j+1 \pmod{2},$$

wobei

$$1 \approx 1 - \|D_{j,j+1}^1(j,j+1)_2(s)\| \leq \|1 - D_{j,j+1}^1(j,j+1)_2(s)\| \leq 1 + \|D_{j,j+1}^1(j,j+1)_2(s)\| \approx 1$$

ist. So gilt für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ auch $\|D_{j,j+1}^1(j,j+1)_2(s)\| \approx 1$, $j=1,2, j+1 \pmod{2}$. Das Lemma gilt also für $J=2$.

b) Wir nehmen nun an, daß die Behauptung des Lemmas B.3 für alle $J'=1,2,\dots,J-1$ gilt und beweisen sie für J . Nach (B.4) ist

$$\begin{aligned} & \|D_{j,j}^1(1,\dots,J)_J(s)\| \leq \\ & \leq \sum_{\substack{J-1 \\ \mu=1}} \frac{(1,\dots,J)_J}{P} \{ \|A_{j,j}^1(s)\| \| \prod_{j_1=j_2=j_3=j_4=j_5=j_6=j_7=j_8=j_9=j_{10}}^1 (s; \sigma_{j_1}^1 - \sigma_{j_2}^1 - \sigma_{j_3}^1 - \sigma_{j_4}^1 - \sigma_{j_5}^1 - \sigma_{j_6}^1 - \sigma_{j_7}^1 - \sigma_{j_8}^1 - \sigma_{j_9}^1 - \sigma_{j_{10}}^1) \| \|D_{j,j}^1(1,\dots,J)_J(s)\| \} \\ & \cdot \prod_{\mu=1}^{J-1} (\|A_{j,j}^1(s)\| \cdot \| \prod_{j_1=j_2=j_3=j_4=j_5=j_6=j_7=j_8=j_9=j_{10}}^1 (s; \sigma_{j_1}^1 - \sigma_{j_2}^1 - \sigma_{j_3}^1 - \sigma_{j_4}^1 - \sigma_{j_5}^1 - \sigma_{j_6}^1 - \sigma_{j_7}^1 - \sigma_{j_8}^1 - \sigma_{j_9}^1 - \sigma_{j_{10}}^1) \| \|D_{j,j}^1(1,\dots,J)_J(s)\|) \\ & \cdot \|A_{j,j}^1(s)\| \cdot \| \prod_{j_1=j_2=j_3=j_4=j_5=j_6=j_7=j_8=j_9=j_{10}}^1 (s; \sigma_{j_1}^1 - \sigma_{j_2}^1 - \sigma_{j_3}^1 - \sigma_{j_4}^1 - \sigma_{j_5}^1 - \sigma_{j_6}^1 - \sigma_{j_7}^1 - \sigma_{j_8}^1 - \sigma_{j_9}^1 - \sigma_{j_{10}}^1) \| \}, \quad j=1,\dots,J. \end{aligned}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt aber für alle $J' < J$

$\|D_{j,j}^1(\dots)_{J'}(s)\| \approx 1$. Im Teil a) dieses Beweises haben wir gezeigt, daß für alle s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ gilt

$$\|A_{j,j}^1(s)\| \cdot \| \prod_{j_1=j_2=j_3=j_4=j_5=j_6=j_7=j_8=j_9=j_{10}}^1 (s; \sigma_{j_1}^1 - \sigma_{j_2}^1 - \sigma_{j_3}^1 - \sigma_{j_4}^1 - \sigma_{j_5}^1 - \sigma_{j_6}^1 - \sigma_{j_7}^1 - \sigma_{j_8}^1 - \sigma_{j_9}^1 - \sigma_{j_{10}}^1) \| \leq \frac{\bar{M}_{j,j+1}}{2^2}, \quad j,j+1=1,\dots,J,$$

so daß

$$\|D_{j,j}^1(1,\dots,J)_J(s)\| \leq \sum_{\substack{J-1 \\ \mu=1}} \frac{(1,\dots,J)_J}{P} \left(\frac{\bar{M}}{2^2}\right)^{\mu+1} = \sum_{\mu=1}^{J-1} \frac{(J-1)!}{(J-\mu)!} \left(\frac{\bar{M}}{2^2}\right)^{\mu+1},$$

wobei $\bar{M} := \max_{j_1, \dots, j_{m-1}} (j_1, \dots, j_{m-1})$. Wir können z so groß wählen, daß die Abschätzungsfunktion oben klein wird (dabei achten wir darauf, daß auch die Abschätzung von a) noch erhalten bleibt, d.h. wir nehmen ein maximales z): für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ wird

$$\|D_{jj}^1(1, \dots, j)_2(s)\| \ll 1, \quad j=1, \dots, J.$$

Dies sichert aber für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} [D_{jj}^1(1, \dots, j)_2(s)]^v = \frac{1}{1 - D_{jj}^1(1, \dots, j)_2(s)} = D_{jj}^1(1, \dots, j)_2(s), \quad j=1, \dots, J,$$

und wegen

$$1 \approx 1 - \|D_{jj}^1(1, \dots, j)_2(s)\| \leq \|1 - D_{jj}^1(1, \dots, j)_2(s)\| \leq 1 + \|D_{jj}^1(1, \dots, j)_2(s)\| \approx 1$$

ist für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ auch

$$\|D_{jj}^1(1, \dots, j)_2(s)\| \approx 1, \quad j=1, \dots, J.$$

Wir haben also gezeigt, daß ein z mit $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$ existiert, so daß für alle s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ $\|D_{jj}^1(1, \dots, j)_2(s)\| \ll 1$, $\|D_{jj}^1(1, \dots, j)_2(s)\| \approx 1$ gilt. Wir haben das Lemma B.3 bewiesen und die Konvergenz der Reihe in (B.2b) für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ garantiert.

Lemma B.4: Sei $D_{jj}^1(1, \dots, j)_2(s)$ und $D_{j\ell}(1, \dots, j)_2(s)$ für $j, \ell=1, \dots, J$, $j \neq \ell$ durch (B.2) definiert. Dann gilt die Rekursivformel

$$D_{j\ell}^1(1, \dots, j)_2(s) = D_{j\ell}(1, \dots, j)_2(s) + \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^J A_{j'}^{\#}(s) (-\Gamma_{j'}(s; \sigma_j - \sigma_{j'})) D_{j\ell}(1, \dots, j|j')_{2-1}(s). \quad (\text{B.5a})$$

Sei $D_{\ell\ell}^1(1, \dots, j)_2(s)$ durch (B.4) definiert. Dann gilt

$$D_{\ell\ell}^1(1, \dots, j)_2(s) = \sum_{j'=1}^J \sum_{\substack{j''=1 \\ j'' \neq j}}^J \{A_{j'}^{\#}(s) (-\Gamma_{j'}(s; \sigma_{\ell} - \sigma_{j'})) D_{j\ell}^1(1, \dots, j|j')_{2-1}(s) A_{j''}^{\#}(s) (-\Gamma_{j''}(s; \sigma_{j'} - \sigma_{j''}))\}. \quad (\text{B.5b})$$

Beweis des Lemmas B.4: a) Aus der Definition (B.2c) setzen wir für

$$D_{j\ell}^1(1, \dots, j|j')_{2-1}(s) \quad \text{in (B.5a) ein:}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{j,j'}(1, \dots, j)_{j'}(s) \left[A_{j,j'}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j,j'}(s; \varphi_j - \varphi_{j'})) D_{j,j'}(1, \dots, j)_{j'}(s) + \right. \\
 & + \sum_{\substack{j'=1 \\ j+j'=l}}^j A_{j,j'}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j,j'}(s; \varphi_j - \varphi_{j'})) D_{j,j'}(1, \dots, j)_{j'}(s) \cdot \\
 & \cdot \left\{ A_{j,j'}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j,j'}(s; \varphi_j - \varphi_{j'})) D_{j,j'}(1, \dots, j)_{j'}(s) + \right. \\
 & + \sum_{\substack{n=1 \\ (j_1, \dots, j_n)}}^{j-2} \overline{P}^{(1, \dots, j)_{j'}, l} \left\{ A_{j,j'}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j,j'}(s; \varphi_j - \varphi_{j'})) D_{j,j'}(1, \dots, j)_{j'}(s) \cdot \right. \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(A_{j_m}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j_m}(s; \varphi_{j_m} - \varphi_{j_{m+1}})) D_{j_m}(1, \dots, j)_{j_m}(s) \right) \cdot \\
 & \cdot A_{j_n}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j_n}(s; \varphi_{j_n} - \varphi_{j_{n+1}})) D_{j_n}(1, \dots, j)_{j_n}(s) \left. \right\} \left. \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = D_{j,j'}(1, \dots, j)_{j'}(s) \cdot \left[A_{j,j'}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j,j'}(s; \varphi_j - \varphi_{j'})) D_{j,j'}(1, \dots, j)_{j'}(s) + \right. \\
 & + \overline{P}^{(1, \dots, j)_{j'}, l}_{(j_1)} \left\{ A_{j,j'}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j,j'}(s; \varphi_j - \varphi_{j'})) D_{j,j'}(1, \dots, j)_{j'}(s) \cdot \right. \\
 & \cdot A_{j,j'}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j,j'}(s; \varphi_j - \varphi_{j'})) D_{j,j'}(1, \dots, j)_{j'}(s) \left. \right\} + \\
 & + \sum_{n=2}^{j-2} \overline{P}^{(1, \dots, j)_{j'}, l}_{(j_1, \dots, j_n)} \left\{ A_{j,j'}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j,j'}(s; \varphi_j - \varphi_{j'})) D_{j,j'}(1, \dots, j)_{j'}(s) \cdot \right. \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(A_{j_m}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j_m}(s; \varphi_{j_m} - \varphi_{j_{m+1}})) D_{j_m}(1, \dots, j)_{j_m}(s) \right) \cdot \\
 & \cdot A_{j_n}^{\text{wp}}(s) (-\Gamma_{j_n}(s; \varphi_{j_n} - \varphi_{j_{n+1}})) D_{j_n}(1, \dots, j)_{j_n}(s) \left. \right\} \left. \right].
 \end{aligned}$$

Nach der Definition (B.2c) ist aber dieser Ausdruck mit $D_{j,j'}(1, \dots, j)_{j'}(s)$ identisch. Bei der obigen Rechnung haben wir die folgenden Eigenschaften der Variationssummen benutzt:

$$\sum_{\substack{j'=1 \\ j+j'=l}}^j \beta(j') = \overline{P}^{(1, \dots, j)_{j'}, l}_{(j_1)} \beta(j_1)$$

und

$$\sum_{j'_1 \neq l} \sum_{n=1}^{j-3} \frac{(1, \dots, j | j'_1, l)}{(j'_1, \dots, j_n)} \mathcal{P} \ell(j'_1, j'_2, \dots, j'_n) = \sum_{n=2}^{j-2} \frac{(1, \dots, j | j'_1, l)}{(j'_1, \dots, j'_n)} \mathcal{P} \ell(j'_1, \dots, j'_n).$$

Diese Identität erhalten wir dadurch, daß wir j' in j'_1 , j_1 in $j'_2, \dots, j_n$ in j'_{n+1} und $n+1$ in n' umbenennen. Somit haben wir (B.5a) bewiesen.

b) Nach (B.2c) setzen wir für $D_{jj'}(1, \dots, j | j)_{j-1}(s)$ in (B.5b) ein:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{j=1}^j \sum_{j+l} \{ A_L^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{L_j}(s; \mathcal{U}_L - \mathcal{U}_{j'})) D_{jj'}(1, \dots, j | l)_{j-1}(s) A_j^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j_l}(s; \mathcal{U}_{j'} - \mathcal{U}_L)) \} + \right. \\ & + \sum_{j=1}^j \sum_{j+l} \sum_{j' \neq l} \{ A_L^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{L_j}(s; \mathcal{U}_L - \mathcal{U}_{j'})) D_{jj'}(1, \dots, j | l)_{j-1}(s) A_j^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j_l}(s; \mathcal{U}_{j'} - \mathcal{U}_{j'})) \cdot \\ & \cdot D_{jj'}(1, \dots, j | j', l)_{j-2}(s) A_{j'}^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j'_l}(s; \mathcal{U}_{j'} - \mathcal{U}_L)) \} + \\ & + \sum_{j=1}^j \sum_{j+l} \sum_{j' \neq l} \sum_{n=1}^{j-3} \frac{(1, \dots, j | j'_1, l)}{(j'_1, \dots, j'_n)} \{ A_L^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{L_j}(s; \mathcal{U}_L - \mathcal{U}_{j'})) D_{jj'}(1, \dots, j | l)_{j-1}(s) \cdot \\ & \cdot A_j^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j_l}(s; \mathcal{U}_{j'} - \mathcal{U}_{j'})) D_{jj'}(1, \dots, j | l, j'_1)_{j-2}(s) \cdot \\ & \cdot \prod_{r=1}^{n-1} (A_{j_r}^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j_r}(s; \mathcal{U}_{j_r} - \mathcal{U}_{j_{r+1}})) D_{j_r j_{r+1}}(1, \dots, j | l, j'_1, \dots, j'_r)_{j-(n+2)}(s)) \cdot \\ & \cdot A_{j'_n}^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j'_n}(s; \mathcal{U}_{j'_n} - \mathcal{U}_{j'})) D_{jj'}(1, \dots, j | l, j'_1, \dots, j'_n)_{j-(n+2)}(s) \cdot \\ & \cdot A_{j'}^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j'_l}(s; \mathcal{U}_{j'} - \mathcal{U}_L)) \} \Big] = \\ & = \left[\frac{(1, \dots, j | l)}{(j_s)} \{ A_L^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{L_j}(s; \mathcal{U}_L - \mathcal{U}_{j'})) D_{jj'}(1, \dots, j | l)_{j-1}(s) A_j^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j_l}(s; \mathcal{U}_{j'} - \mathcal{U}_L)) \} + \right. \\ & + \frac{(1, \dots, j | l)}{(j_s, j'_1)} \{ A_L^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{L_j}(s; \mathcal{U}_L - \mathcal{U}_{j'})) D_{jj'}(1, \dots, j | l)_{j-1}(s) A_j^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j_l}(s; \mathcal{U}_{j'} - \mathcal{U}_{j'})) \cdot \\ & \cdot D_{jj'}(1, \dots, j | l, j'_1)_{j-2}(s) A_{j'}^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j'_l}(s; \mathcal{U}_{j'} - \mathcal{U}_L)) \} + \\ & + \sum_{n=2}^{j-1} \frac{(1, \dots, j | l)}{(j'_1, \dots, j'_n)} \{ A_L^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{L_j}(s; \mathcal{U}_L - \mathcal{U}_{j'})) D_{jj'}(1, \dots, j | l)_{j-1}(s) \cdot \\ & \cdot \prod_{r=1}^{n-1} (A_{j_r}^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j_r}(s; \mathcal{U}_{j_r} - \mathcal{U}_{j_{r+1}})) D_{j_r j_{r+1}}(1, \dots, j | l, j'_1, \dots, j'_r)_{j-(n+1)}(s)) \cdot \\ & \cdot A_{j'_n}^{\mathcal{W}}(s) (-\Gamma_{j'_n}(s; \mathcal{U}_{j'_n} - \mathcal{U}_{j'})) \} \Big]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist aber nach (B.4) mit $D_{\ell\ell}^1(1, \dots, j)_j(1)$

identisch. Bei der Umrechnung haben wir, neben den im Teil a)

festgestellten Eigenschaften, die folgende Eigenschaft der

Variationssummen benützt:

$$\sum_{j=1}^j \sum_{j_1=1}^j \sum_{j_2=1}^{j-1} \frac{(1, \dots, j / 1, j_1, j_2)}{(j_1, \dots, j_2)} P \quad f(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, j_n) = \sum_{j_1=1}^{j-1} \frac{(1, \dots, j / \ell)}{(j_1, \dots, j_{n-1})} P \quad f(j_1, \dots, j_{n-1}) .$$

Diese Identität erhält man, wenn man j in j_1' , j_1 in j_2' , ..., j_n in j_{n+1}' , j' in j_{n+2}' und $n+2$ in n' .

Das Lemma B.4 ist also bewiesen.

Mit Hilfe der Hilfssätze B.2 bis B.4 können wir nun den Satz B.1 beweisen:

Beweis des Satzes B.1: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion.

a) $J=2$. Dann wollen wir identifizieren: $A:=1$, $B:=A_1^{\text{wp}}(\Delta) \Pi_2(s; \underline{x}_1 - \underline{x}_2)$

und $C:=A_2^{\text{wp}}(\Delta) \Pi_2(s; \underline{x}_2 - \underline{x}_3)$. A^{-1} existiert und ist gleich 1.

Für $[1 - CA^{-1}B]$ gilt

$$\begin{aligned} [1 - CA^{-1}B] &= 1 - A_2^{\text{wp}}(\Delta) \Pi_2(s; \underline{x}_2 - \underline{x}_3) A_1^{\text{wp}}(\Delta) \Pi_2(s; \underline{x}_1 - \underline{x}_2) = \\ &= 1 - A_1^{\text{wp}}(\Delta) (-\Pi_2(s; \underline{x}_2 - \underline{x}_3)) A_2^{\text{wp}}(\Delta) (-\Pi_2(s; \underline{x}_1 - \underline{x}_2)) . \end{aligned}$$

Nach dem Lemma B.3 ist aber $\|A_1^{\text{wp}}(\Delta) (-\Pi_2(s; \underline{x}_1 - \underline{x}_2)) A_2^{\text{wp}}(\Delta) (-\Pi_2(s; \underline{x}_2 - \underline{x}_3))\| \ll 1$

für s mit $\text{Re } s \geq z$, $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$ und groß genug, so daß $[1 - CA^{-1}B]^{-1}$

existiert, als unendliche Summe geschrieben und mit (B.2b)

für $J=2$ identifiziert werden kann:

$$\begin{aligned} [1 - CA^{-1}B]^{-1} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} [A_1^{\text{wp}}(\Delta) \Pi_2(s; \underline{x}_1 - \underline{x}_2) A_2^{\text{wp}}(\Delta) (-\Pi_2(s; \underline{x}_2 - \underline{x}_3))]^\nu = \\ &= D_{22}(1, 2)_2(\Delta) . \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des Lemmas B.2 sind also für alle s mit

$\text{Re } s \geq z$ erfüllt und wir können es zur Inversion der Matrix $\mathcal{M}_{22}(\Delta)$

anwenden. Dazu rechnen wir aus:

$$\begin{aligned} A^{-1} + A^{-1}B[1 - CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} &= \\ &= 1 + A_1^{\text{wp}}(\Delta) (-\Pi_2(s; \underline{x}_1 - \underline{x}_2)) \sum_{\nu=0}^{\infty} [A_1^{\text{wp}}(\Delta) (-\Pi_2(s; \underline{x}_1 - \underline{x}_2)) A_2^{\text{wp}}(\Delta) (-\Pi_2(s; \underline{x}_2 - \underline{x}_3))]^\nu \\ &\quad \cdot A_2^{\text{wp}}(\Delta) (-\Pi_2(s; \underline{x}_2 - \underline{x}_3)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} [A_1^{\nu}(s)(-\Gamma_1(s; \vartheta_1 - \vartheta_1)) A_1^{\nu}(s)(-\Gamma_1(s; \vartheta_1 - \vartheta_1))]^{\nu} = \\
 &= D_{11}(1, 2)_1(s), \\
 &- A_1^{-1} B [1 - C A_1^{-1} B]^{-1} C A_1^{\nu}(s)(-\Gamma_1(s; \vartheta_1 - \vartheta_1)) \sum_{\nu=0}^{\infty} [A_2^{\nu}(s)(-\Gamma_2(s; \vartheta_1 - \vartheta_1)) A_2^{\nu}(s)(\Gamma_2(s; \vartheta_1 - \vartheta_1))]^{\nu} = \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} [A_1^{\nu}(s)(-\Gamma_1(s; \vartheta_1 - \vartheta_1)) A_1^{\nu}(s)(-\Gamma_1(s; \vartheta_1 - \vartheta_1))]^{\nu} \cdot A_1^{\nu}(s)(-\Gamma_1(s; \vartheta_1 - \vartheta_1)) = \\
 &= D_{12}(1, 2)_1(s)
 \end{aligned}$$

und

$$-[1 - C A_1^{-1} B]^{-1} C A_1^{-1} = D_{22}(1, 2)_1(s) A_1^{\nu}(s)(-\Gamma_1(s; \vartheta_1 - \vartheta_1)) = D_{21}(1, 2)_1(s),$$

wobei wir die Definitionen (B.2) benutzt haben. Für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ ist also die invertierte Matrix

$$\mathcal{A}_{22}^{-1}(s) = \begin{pmatrix} D_{11}(1, 2)_1(s) & D_{12}(1, 2)_1(s) \\ D_{21}(1, 2)_1(s) & D_{22}(1, 2)_1(s) \end{pmatrix},$$

der Satz B.1 ist für $J=2$ bewiesen.

b) Wir nehmen nun an, daß der Satz für $J-1$ gültig ist. Dann

identifizieren wir A mit der $(J-1) \times (J-1)$ Matrix $\mathcal{A}_{J-1, J-1}^{(s)} = (A_{jj}^{\nu}(s))_{j, j'=1, \dots, J-1}$,

B mit dem $(J-1)$ -dimensionalen Spaltenvektor $(A_j^{\nu}(s) \Gamma_j(s; \vartheta_j - \vartheta_j))_{j=1, \dots, J-1}$,

C mit dem $(J-1)$ -dimensionalen Zeilenvektor $(A_j^{\nu}(s) \Gamma_j(s; \vartheta_j - \vartheta_j))_{j=1, \dots, J-1}$.

Nach der Induktionsvoraussetzung existiert für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$

$$A^{-1} = \mathcal{A}_{J-1, J-1}^{-1}(s) = (D_{jj'}(1, \dots, J-1)_J(s))_{j, j'=1, \dots, J-1}.$$

Mit (B.5b) gilt

$$\begin{aligned}
 [1 - C A^{-1} B] &= \\
 &= [1 - \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{j'=1}^{J-1} A_j^{\nu}(s)(-\Gamma_j(s; \vartheta_j - \vartheta_j)) D_{jj'}(1, \dots, J-1)_J(s) A_{j'}^{\nu}(s)(\Gamma_{j'}(s; \vartheta_{j'} - \vartheta_{j'}))] = \\
 &= [1 - D_{JJ}^1(1, \dots, J)_J(s)].
 \end{aligned}$$

Nach dem Lemma B.3 gibt es aber ein z , $z \in \mathbb{R}$ und $z > 0$ (wir wählen dieses z so, daß auch die Existenz des Inversen von A gesichert bleibt, d.h. das Maximum dieser beiden z 's), so daß für alle s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ $\|D_{JJ}^1(1, \dots, J)_J(s)\| \ll 1$. Deshalb existiert $[1 - C A^{-1} B]^{-1}$

und kann in eine unendliche Summe entwickelt werden. Mit (B.2b) ist

$$[1 - CA^{-1}B]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} [D_{jj}^{-1}(1, \dots, j)_j(s)]^j = D_{jj}^{-1}(1, \dots, j)_j(s).$$

Die Voraussetzungen des Lemmas B.2 sind also erfüllt, für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ können wir es zur Inversion der Matrix $A_{jj}(s)$ benutzen. Unter Verwendung von (B.5a) berechnen wir den $j-1$ -dimensionalen Zeilenvektor

$$\begin{aligned} -[1 - CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} &= \\ &= (D_{jj}^{-1}(1, \dots, j)_j(s) \cdot \sum_{i=1}^{j-1} A_{ji}^{-1}(s) \cdot (B_{ji}(s) \cdot D_{ji}^{-1}(1, \dots, j-1)_j(s))_{j=1, \dots, j-1} = \\ &= (D_{j1}^{-1}(1, \dots, j)_j(s), \dots, D_{j,j-1}^{-1}(1, \dots, j)_j(s)). \end{aligned}$$

Mit dem Element $[1 - CA^{-1}B]^{-1}$ lautet die j -te Zeile der invertierten Matrix $(D_{j1}^{-1}(1, \dots, j)_j(s), \dots, D_{jj}^{-1}(1, \dots, j)_j(s))$.

Durch etwas umfangreiche Rechnungen kann man auch die anderen Elemente der invertierten Matrix direkt ausrechnen. Wir sehen aber, daß sowohl (B.1) wie auch (B.2) nicht verändert werden, wenn wir die Atome umnummerieren. O.B.d.A. können wir also eine neue Numerierung einführen, es soll die Reihenfolge gelten: $1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, j-1, j$. Dann können wir die obige Rechnung wiederholen und erhalten für die j -te Zeile der invertierten Matrix $(D_{j1}^{-1}(1, \dots, j)_j(s), \dots, D_{jj}^{-1}(1, \dots, j)_j(s))$.

Wir sehen somit, daß ein z mit $z \in \mathbb{R}$ und $z > 0$ existiert, so daß für s mit $\operatorname{Re} s \geq z$ die Matrix (B.1) invertierbar ist und für deren Inverses (B.2) gilt, und zwar für jedes $j \in \mathbb{N}$. Dabei sind alle in (B.2) enthaltenen Reihen konvergent.

Literaturverzeichnis

1. STELZER, M., MÜHLSTEIN, J., ERNST, V.: J.Math.Phys. (in Druck)
2. WEISSKOPF, V., WIGNER, E.: Z.Physik 63, 54 (1930)
WEISSKOPF, V.: Ann.Phys. (Leipzig) 9, 23 (1931)
3. DIRAC, P.A.M.: Z.Physik 44, 585 (1927)
4. ERNST, V., STEHLE, P.: Phys.Rev. 176, 1456 (1968)
5. GRIMM, E., ERNST, V.: J.Phys.A: Math., Nucl., Gen. 7, 1664 (1974)
6. GRIMM, E., ERNST, V.: Z.Physik A 274, 293 (1975)
7. GRIMM, E.: Doktorarbeit, Universität München (1976)
8. MÜHLSTEIN, J., ERNST, V.: Ann.Phys. (Leipzig) (in Druck)
9. ERNST, V.: Z.Physik 218, 111 (1969)
10. STELZER, M.: Doktorarbeit, Universität München (1976)
11. MÜHLSTEIN, J.: Diplomarbeit, Universität München (1974)
12. CSILLAG, L., JANOSSY, M., NARAY, Zs.: Acta Phys. Hung. 32, 275 (1972)
13. DICKE, R.H.: Phys.Rev. 93, 99 (1954)
14. SCHWABL, F., THIRRING, W.: Ergeb.Exakt.Naturw. 36, 219 (1964)
15. SCHWENDIMANN, P.: Z.Physik 265, 267 (1973)
16. REHLER, N.E., EBERLY, J.H.: Phys.Rev A 3, 1735 (1971)
17. JODOIN, R., MANDEL, L.: Phys.Rev. A 9, 873 (1974)
KIMBLE, H.J., MANDEL, L.: Phys.Rev. A 13, 2123 (1976)
KIMBLE, H.J., MANDEL, L.: Phys.Rev. A 15, 689 (1977)
18. PAERSCHKE, H., SÜSSE, K.E.: Ann.Phys. (Leipzig) 33, 215 (1976)
PAERSCHKE, H., SÜSSE, K.E., WELSCH, D.G.: Ann.Phys. (Leipzig) 33, 228 (1976)
19. BJORKEN, J.D., DRELL, S.D.: Relativistic Quantum Field Theory,
New York: McGraw-Hill 1965
20. SOMMERFELD, A.: Atombau und Spektrallinien, Bd.I u. Bd.II,
Braunschweig: Vieweg 1960

21. DÖTSCH, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation,
München: Oldenburg 1956
22. ERNST, V.: J. Phys. A: Math., Gen. 8, 76 (1975)
23. ERNST, V.: Z. Physik B 23, 113 (1976)
24. PESCHL, E.: Funktionentheorie, Bd. I, Mannheim: Bibl. Inst. 1968
25. JÖRGENS, K.: Lineare Operatoren in Hilberträumen, Universität München (1971)
26. ACHESER, N. I., GLASMANN, I. M.: Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum
Berlin: Akademie-Verl. 1968
27. BARTSCH, H. J.: Mathematische Formeln, Leipzig: Fachbuchverlag 1960

Herrn Priv.Doiz.Dr. V. ERNST danke ich für seine ständige Betreuung und Anregung zu dieser Arbeit. Herrn Prof.Dr. F. BOPP danke ich für die Aufnahme in sein Institut und für die Bereitstellung von Institutionsmitteln.

Ferner sei den Herrn Dipl.Phys. E. GRIMM und Dr. M. STELZER für zahlreiche anregende Gespräche und kritische Anregungen gedankt.

Die hier vorgelegten Ergebnisse wurden im Verlauf eines mit DFG-Mitteln finanzierten Forschungsprogramms erarbeitet.

Lebenslauf

Als zweites Kind von Robert Mühlstein und dessen Ehefrau Margarete, geb. Lederer, wurde ich, Jan Mühlstein, am 3. Juli 1949 in Most (Brüx), CSR geboren. Aufgewachsen und in die Schule gegangen bin ich in Most und in Teplice (Teplitz-Schönau), CSR. Das Abitur legte ich im Juni 1967 in Liberec (Reichenberg), CSR ab.

Im Wintersemester 1967/1968 begann ich an der Karlsuniversität in Prag das Physikstudium, welches ich nach meiner Übersiedlung in die Bundesrepublik Deutschland im September 1969 ab dem Sommersemester 1970 an der Ludwig-Maximilians-Universität in München fortsetzte und hier im November 1974 mit der Diplom-Hauptprüfung abschloß. Die theoretische Diplomarbeit unter der Leitung von Priv.Doiz.Dr. V. Ernst hatte das Thema: "Doppler-Effekte in der Weisskopf-Wigner-Theorie".

Im Wintersemester 1974/1975 begann ich unter der wissenschaftlichen Leitung von Priv.Doiz.Dr. V. Ernst die Untersuchungen zur vorliegenden Dissertation am Lehrstuhl Prof.Dr. F. Bopp der Sektion Physik der Universität München.

Ich bin unverheiratet und habe keine Kinder.

Seit 31. Januar 1974 bin ich deutscher Staatsangehöriger.

